

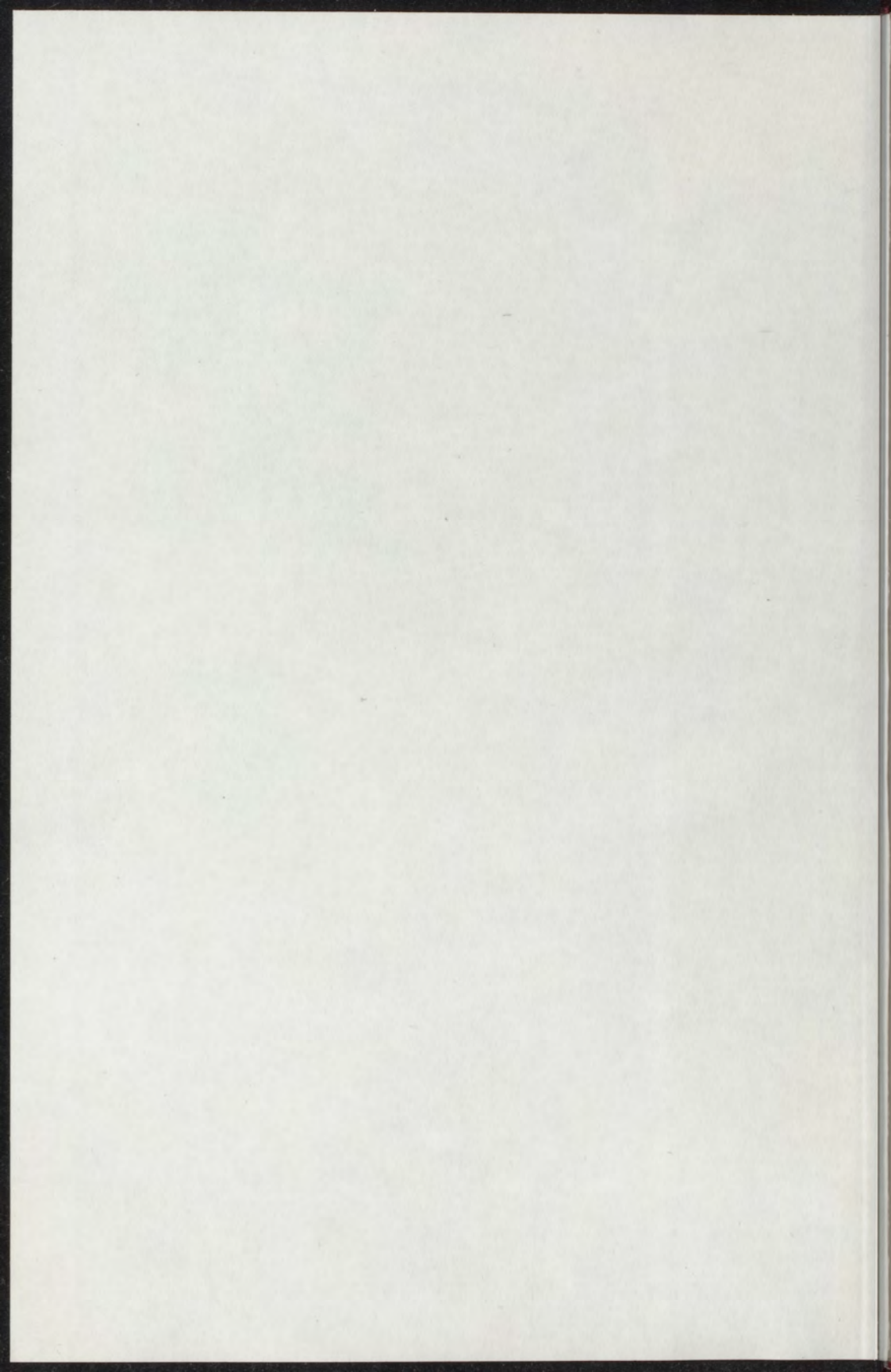
DISL
1912-14

Universiteit Leiden



1 897 007 4



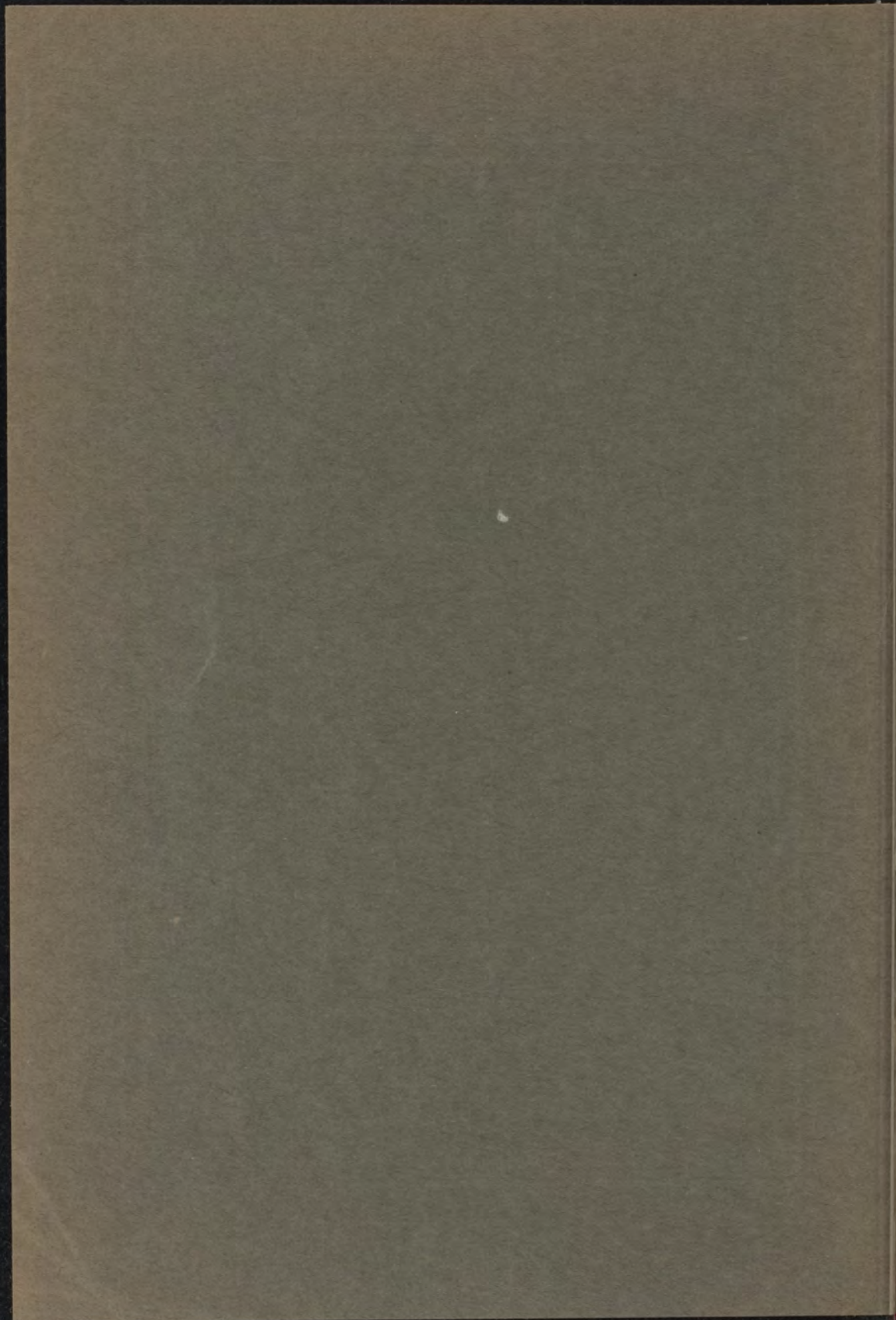


OVER DE ZWARTE STRALING IN
RUITEN VAN VERSCHILLENDE
□ □ VORM □ □



□ □ JOHANNA REUDLER □ □

Diss Leiden
1912 nr 14



OVER DE ZWARTE STRALING IN
RUIMTEN VAN VERSCHILLENDE
VORM

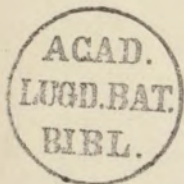
OVER DE ZWARTE STRALING IN RUIMTEN
VAN VERSCHILLENDE VORM

DR. J. VAN DER POL, DIRECTOR VAN HET NEDERLANDSCH
FYSIEK LABORATORIUM, AMSTERDAM

N.V. ELECTRISCHE DRUKKERIJ „VOLHARDING”, AMSTERDAM
□□ CEINTUURBAAN 250 EN 252 □ TELEFOON ZUID 1099 □□

OVER DE ZWARTE STRALING IN
RUIMTEN VAN VERSCHILLENDE
VORM

□□ PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN
DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN
NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT
TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-
MAGNIFICUS DR. F. PYPER, HOOGLEERAAR
IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID,
VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUUR-
KUNDE TE VERDEDIGEN OP DINSDAG 21 MEI
1912, DES NAMIDDAGS TE VIER UUR, DOOR
JOHANNA REUDLER, GEBOREN TE ROTTERDAM



OVER DE ZWARTE STRALING IN
RUIMTEN VAN VERSCHILLENDE
VORM

DO PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN
DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS EN
NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT
TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR
MAGNIFICUS DR. F. P. J. VAN DER
IN DE FACULTEIT DER GODDIELERKUNDE
VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUUR
KUNDE TE VERDEDIGEN OP DINSDAG 21 MEI
1912 DES NAMIDDAGS TE VIJF UUR DOOR
JOHANNAS REUBENUS GEBOREN TE ROTTERDAM



Printed and bound by J. M. G. ...

AAN MIJN VADER EN AAN DE
NAGEDACHTENIS VAN MIJNE MOEDER

AAN MIJN VADER EN AAN DE
NAGEDACHTENIS VAN MIJNE MOEDER

BIJ HET VOLTOOIEN VAN DIT PROEF-
SCHRIFT WIL IK GAARNE MIJN DANK
BETUIGEN AAN U, HOOGLEERAREN EN
OUD-HOOGLEERAREN DER LEIDSCHEN
EN DER AMSTERDAMSCHEN UNIVERSI-
TEIT, DIE MIJN STUDIE GELEID HEBT.
IN HET BIJZONDER IS HET MIJ EEN
VOORRECHT MIJN DANK TE RICHTEN
TOT U, HOOGGELEERDE LORENTZ,
HOOGGEACHTE PROMOTOR, VOOR DE
BEREIDWILLIGHEID, WAARMEDE U MIJ
STEEDS TER ZIJDE HEBT GESTAAN, EN
VOOR UWE VOORTDURENDE BELANG-
STELLING EN AANMOEDIGING BIJ HET
SAMENSTELLEN VAN DIT PROEFSCHRIFT

BIJ HET VOLTOOIEN VAN DIT PROEF-
SCHRIFT WIL IK DAARNE MIJN DANK
BETUIGEN AAN U, HOOGLEERAREN EN
OUD-HOOGLEERAREN DER LEIDSCHE
EN DER AMSTERDAMSCHE UNIVERSI-
TEIT, DIE MIJN STUDIE GELIJD HEBT,
IN HET BIJZONDER IS HET MIJ EEN
VOORRECHT MIJN DANK TE RICHTEN
TOT U, HOOGGELEERDE LÖRRENTZ,
HOOGZACHTE PROMOTOR, VOOR DE
BEREIDWILIGHEID, WAARMEDE U MIJ
STREKS TER ZIJDE HEBT GESTAAN EN
VOOR UWE VOORTDURENDE BELANG-
STELLING EN AANMOEDIGING BIJ HET
SAMENSTELLEN VAN DIT PROEFSCHRIFT

INLEIDING.

In dit proefschrift wordt het stralingsveld beschouwd in ruimten, die door volkomen spiegelende wanden begrensd en met een diathermaan medium gevuld zijn.

Bevindt zich in een dergelijke ruimte een volkomen zwart lichaam, dan zal dit voortdurend stralen uitzenden, die tusschen de weerkaatsende wanden heen en weergaan en tenslotte door het lichaam worden geabsorbeerd. Er ontstaat dan volgens de wetten van KIRCHHOFF een thermodynamische evenwichtstoestand, waarbij door het lichaam evenveel energie wordt uitgezonden als opgenomen en waarbij de toestand in het medium volkomen bepaald is door de absolute temperatuur T van het lichaam. Deze toestand, de z.g.n. zwarte straling, kan ook in de ruimte bestaan, nadat het zwarte lichaam daaruit is weggenomen. Wat ook de gedaante van het spiegelend omhulsel is, steeds kan daarin een stralingstoestand bestaan, die met een zwart lichaam en ook met een willekeurig lichaam van een bepaalde temperatuur T in evenwicht zou kunnen zijn.

In de volgende beschouwingen hebben wij steeds een bepaalde temperatuur op het oog.

Bij den bepaalden stralingstoestand is het veld homogeen en isotroop en is de energie op een bepaalde wijze over de verschillende golflengten verdeeld.

Het onderzoek naar deze energieverdeeling is het belangrijkste probleem der warmtestraling. Reeds KIRCHHOFF heeft opgemerkt, dat de energiedichtheid, tengevolge van stralen, waarvan de golflengte ligt tusschen de grenzen λ en $\lambda + d\lambda$, kan worden voorgesteld door $F(\lambda, T) d\lambda$ en op de belangrijkheid van de kennis der universeele functie F gewezen.

Na BOLTZMANN en WIEN, die met behulp der thermodynamica en der electromagnetische lichttheorie de bekende wetten betreffende deze functie hebben afgeleid, is de functie door PLANCK, LORENTZ en JEANS naar drie verschillende methoden bepaald. Alleen de theorie van PLANCK heeft tot een formule geleid, die voor stralen van alle mogelijke golflengten met de waarnemingen overeenstemt; trouwens bij de beschouwingen van LORENTZ is uitdrukkelijk op den voorgrond gesteld, dat men met stralen van niet te kleine golflengte te doen heeft.

Wat deze stralen betreft, tot welke wij ons ook hier zullen bepalen, geven de drie theorieën hetzelfde resultaat, n.l.

$$F(\lambda, T) = \frac{16 \pi \alpha T}{3 \lambda^4},$$

waarbij αT de gemiddelde kinetische energie van een gasmolecuul is, tengevolge van de warmtebeweging bij de absolute temperatuur T .

JEANS komt tot deze oplossing door toepassing van het principe van de aequipartitie der energie.

Dit principe, dat in zijn eenvoudigsten vorm het eerst door MAXWELL is uitgesproken en zijn meer algemeene beteekenis aan BOLTZMANN dankt, kan als volgt worden aangeduid:

Wanneer de bewegingstoestand van een systeem beschouwd kan worden als te ontstaan uit de superpositie van een aantal elementaire bewegingstoestanden, — aan de verschillende graden van vrijheid beantwoordend —, in dier voege, dat de totale

kinetische energie de som is van de kinetische energieën dier elementaire bewegingstoestanden, dan zal bij het warmte-evenwicht tusschen twee dergelijke stelsels met een groot aantal graden van vrijheid, gemiddeld genomen, aan elken elementairen bewegingstoestand van het ééne stelsel, zoowel als van het andere, dezelfde kinetische energie toekomen.

Wat het aantal graden van vrijheid betreft, dit komt overeen met het aantal onafhankelijke coördinaten van LAGRANGE, die het systeem bepalen. Kunnen deze veranderlijken, $q_1, q_2 \dots q_n$, zoodanig gekozen worden, dat de kinetische energie bestaat uit een som van kwadraten van de fluxie's der veranderlijken, zoodat

$$E = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dots + \dot{q}_n^2$$

en de potentiële energie uit een som van kwadraten der veranderlijken, ieder met een constanten coëfficiënt vermenigvuldigd, zoodat

$$V = a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + \dots + a_n q_n^2,$$

dan komen de veranderingen van het systeem overeen met de principale trillingen van een mechanisch systeem dat kleine schommelingen om den evenwichtsstand volbrengt en zijn voor iederen elementairen toestand de gemiddelde waarden van de potentiële en van de kinetische energie, genomen over een periode of over een tijd die groot is t.o.z. van de periode, aan elkaar gelijk.

Dit principe is door JEANS toegepast op electromagnetische trillingen, zooals zij bij de bovengenoemde zwarte straling binnen een volkomen spiegelend omhulsel bestaan.

Met de kinetische energie komt in dit geval de magnetische, met de potentiële energie de electriche overeen.

Door de energieverdeeling te beschouwen tusschen een gas, dat op de absolute temperatuur T wordt gehouden en den aether

binnen het beschouwde omhulsel, blijkt, dat aan iederen graad van vrijheid een bedrag aan magnetische energie $\frac{1}{2} a T$ moet worden toegekend, wanneer $a T$ weer voorstelt de kinetische energie van een gasmolecuul tengevolge van de warmtebeweging.

Beschouwt men alleen trillingen, waarvan de golflengte ligt tusschen twee gegeven grenzen, dan heeft men met een bepaald, eindig aantal graden van vrijheid te doen.

Het beginsel van de aequipartitie der energie stelt ons dan in staat, de energie der zwarte straling voor het gekozen interval te bepalen en dus de functie $F(\lambda, T)$ te leeren kennen. De uitkomsten stemmen voor groote golflengten met de ervaring en met hetgeen men op andere wijze gevonden heeft, overeen.

Op de zeer groote bezwaren, waartoe de toepassing van de theorie van JEANS aanleiding geeft, wanneer men stralen van alle mogelijke golflengten beschouwt, zal hier niet worden ingegaan.

Het onderwerp van dit proefschrift is de staande electromagnetische golven te beschouwen, die in door volkomen spiegelende wanden begrensde ruimten kunnen bestaan en die overeenkomen met de tonen, die een afgesloten gasruimte zou kunnen voortbrengen. De toepassing van het principe van JEANS ter berekening van de stralingsenergie komt dan overeen met het bepalen van het aantal zeer hooge boventonen, waarvan de frequentie tusschen twee gegeven grenzen ligt.

JEANS en RAYLEIGH reeds voor hem, hebben deze staande golven beschouwd in den aether binnen een rechthoekig parallelepipedum.

In het eerste hoofdstuk zijn deze beschouwingen verder uitgewerkt, ook voor het geval, dat het parallelepipedum gevuld is met een willekeurig isotroop of ook anisotroop medium en met twee verschillende isotrope media.

In het tweede hoofdstuk is op dezelfde wijze het stralingsveld binnen een bol beschouwd.

Daar volgens de theorie der warmtestraling de dichtheid der energie alleen afhangt van de golflengte en de absolute temperatuur, moet het aantal bewegingswijzen met frequentie tusschen twee gegeven grenzen steeds evenredig gevonden worden met

den inhoud der begrensde ruimte en onafhankelijk van den vorm der begrenzing. Het was te verwachten, dat een dergelijke stelling ook zou gelden voor andere trillingsverschijnselen, die bepaald worden door differentiaalvergelijkingen, waarvan de vorm min of meer met de electromagnetische veldvergelijkingen overeenstemt, dus bijv. voor het aantal boventonen tusschen twee gegeven frequentie's van trillende vliezen en gasmassa's. In het laatste hoofdstuk is dit voor enkele bijzondere gevallen aangetoond.

HOOFDSTUK I.

Over den stralingstoestand binnen een parallelepipedum met volkomen spiegelende wanden.

Wij zullen dezen toestand op de aangegeven wijze onderzoeken voor verschillende gevallen, n.l.:

1^e. wanneer zich binnen het parallelepipedum alleen aether bevindt;

2^e. wanneer het parallelepipedum met een homogeen, isotroop, ponderabel medium gevuld is;

3^e. wanneer het parallelepipedum met een homogeen kristal gevuld is;

4^e. wanneer het parallelepipedum door een vlak, evenwijdig aan één der zijvlakken, in twee deelen is verdeeld, welke ieder met een verschillend isotroop medium gevuld zijn.

§ 1.

Het electromagnetisch veld, dat binnen het parallelepipedum in den aether bestaan kan, is bepaald door de vergelijkingen van MAXWELL voor de diëlectrische verplaatsing \mathbf{d} en de magnetische kracht \mathbf{h} , zoodat

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div.} \mathbf{d} &= 0 \\ \operatorname{div.} \mathbf{h} &= 0 \\ \operatorname{rot.} \mathbf{h} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{d}} \\ \operatorname{rot.} \mathbf{d} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{h}}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

waarin c de snelheid van het licht voorstelt.

Wij zullen onderstellen, dat de wanden van het parallelepipedum volkomen geleidend zijn, waarvan het gevolg zal zijn, dat zij, zooals verlangd werd, volkomen spiegelen.

Dan zal aan de grensvlakken de tangentiële component der diëlectrische verplaatsing en de normale component der magnetische kracht moeten verdwijnen.

Ons doel zal dus zijn alle mogelijke oplossingen van deze vergelijkingen en grensvoorwaarden te zoeken, om daarna door toepassing van het principe van JEANS, de energie per volume-eenheid te berekenen.

Overeenkomstig een bekende opvatting zullen wij de gezochte staande golven beschouwen als te zijn samengesteld uit loopende golfstelsels, die telkens door de zijwanden van het parallelepipedum teruggekaatst worden. Voor één daarvan, dat wij ter onderscheiding het „eerste” zullen noemen, duiden wij de richtingscosinussen aan met α , β , γ . Daarbij leggen wij de coördinaatassen langs de ribben van het parallelepipedum, zoodat dit begrensd wordt door de vlakken

$$x = 0, \quad x = l_1, \quad y = 0, \quad y = l_2, \quad z = 0, \quad z = l_3,$$

waarbij l_1 , l_2 , l_3 , de lengte der ribben zijn.

Het is duidelijk, dat door terugkaatsing tegen de wanden de voortplantingsrichting der golfstelsels zoodanig verandert, dat telkens één richtingscosinus van teeken omkeert, zoodat wij alles samengenomen met acht en niet meer stelsels van loopende golven te doen hebben; hun voortplantingsrichtingen worden bepaald door de constanten

$$\begin{aligned} &(\alpha, \beta, \gamma), \quad (-\alpha, \beta, \gamma), \quad (\alpha, -\beta, \gamma), \quad (\alpha, \beta, -\gamma), \\ &(\alpha, -\beta, -\gamma), \quad (-\alpha, \beta, -\gamma), \quad (-\alpha, -\beta, \gamma), \quad (-\alpha, -\beta, -\gamma). \end{aligned}$$

Wij duiden de frequentie der trillingen (het aantal trillingen in 2π tijdseenheden) met n aan, de amplitudo van het eerste golfstelsel met a , en de richtingscosinussen van de electriche en magnetische kracht bij dit golfstelsel, resp. met α_1 , β_1 , γ_1

en $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, zoodat de drie richtingen (α, β, γ) , $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ en $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ loodrecht op elkaar staan en

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= \beta \gamma_1 - \gamma \beta_1 \\ \beta_2 &= \gamma \alpha_1 - \alpha \gamma_1 \\ \gamma_2 &= \alpha \beta_1 - \beta \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

is.

Richt men het verder zoo in, dat aan de zijvlakken $x=0$, $y=0$, $z=0$ aan de grensvoorwaarden voldaan is, dan verkrijgt men de volgende uitdrukkingen voor de staande golven:

$$\left. \begin{aligned} d_x &= -8 a \alpha_1 \cos (nt+p) \cos \frac{n \alpha x}{c} \sin \frac{n \beta y}{c} \sin \frac{n \gamma z}{c} \\ d_y &= -8 a \beta_1 \cos (nt+p) \sin \frac{n \alpha x}{c} \cos \frac{n \beta y}{c} \sin \frac{n \gamma z}{c} \\ d_z &= -8 a \gamma_1 \cos (nt+p) \sin \frac{n \alpha x}{c} \sin \frac{n \beta y}{c} \cos \frac{n \gamma z}{c} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} h_x &= 8 a \alpha_2 \sin (nt+p) \sin \frac{n \alpha x}{c} \cos \frac{n \beta y}{c} \cos \frac{n \gamma z}{c} \\ h_y &= 8 a \beta_2 \sin (nt+p) \cos \frac{n \alpha x}{c} \sin \frac{n \beta y}{c} \cos \frac{n \gamma z}{c} \\ h_z &= 8 a \gamma_2 \sin (nt+p) \cos \frac{n \alpha x}{c} \cos \frac{n \beta y}{c} \sin \frac{n \gamma z}{c} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

die bij rechtstreeksche substitutie inderdaad aan de vergelijkingen van MAXWELL blijken te voldoen.

Opdat ook aan de grensvoorwaarden voor de zijvlakken $x=l_1$, $y=l_2$, $z=l_3$ van het parallelepipedum voldaan wordt, moeten de volgende betrekkingen bestaan:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n \alpha l_1}{c} &= \xi \pi \\ \frac{n \beta l_2}{c} &= \eta \pi \\ \frac{n \gamma l_3}{c} &= \zeta \pi, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

waarbij ξ , η en ζ geheele getallen zijn.

Om alle mogelijke stralen te omvatten, hebben wij ξ , η , ζ slechts positieve waarden toe te kennen, daar met iedere waarde van α , β , γ acht stelsels loopende golven worden samengevat, wier richtingscosinussen gelijk zijn, doch in teeken verschillen.

Met behulp van de betrekkingen (5) kunnen de vergelijkingen (3) en (4) aldus geschreven worden:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}_x &= -8 a \alpha_1 \cos (nt + p) \cos \frac{\xi \pi x}{l_1} \sin \frac{\eta \pi y}{l_2} \sin \frac{\zeta \pi z}{l_3} \\ \mathbf{d}_y &= -8 a \beta_1 \cos (nt + p) \sin \frac{\xi \pi x}{l_1} \cos \frac{\eta \pi y}{l_2} \sin \frac{\zeta \pi z}{l_3} \\ \mathbf{d}_z &= -8 a \gamma_1 \cos (nt + p) \sin \frac{\xi \pi x}{l_1} \sin \frac{\eta \pi y}{l_2} \cos \frac{\zeta \pi z}{l_3} \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}_x &= 8 a \alpha_2 \sin (nt + p) \sin \frac{\xi \pi x}{l_1} \cos \frac{\eta \pi y}{l_2} \cos \frac{\zeta \pi z}{l_3} \\ \mathbf{h}_y &= 8 a \beta_2 \sin (nt + p) \cos \frac{\xi \pi x}{l_1} \sin \frac{\eta \pi y}{l_2} \cos \frac{\zeta \pi z}{l_3} \\ \mathbf{h}_z &= 8 a \gamma_2 \sin (nt + p) \cos \frac{\xi \pi x}{l_1} \cos \frac{\eta \pi y}{l_2} \sin \frac{\zeta \pi z}{l_3} \end{aligned} \right\} (7)$$

Daar $\frac{\pi c}{n} = \frac{1}{2} \lambda$, als λ de golflengte voorstelt, kunnen de voorwaarden (5) geschreven worden

$$\left. \begin{aligned} \alpha l_1 &= \frac{1}{2} \xi \lambda \\ \beta l_2 &= \frac{1}{2} \eta \lambda \\ \gamma l_3 &= \frac{1}{2} \zeta \lambda \end{aligned} \right\} (8)$$

De betrekking $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ geeft dan voor de getallen ξ , η , ζ de voorwaarde

$$\frac{\xi^2}{l_1^2} + \frac{\eta^2}{l_2^2} + \frac{\zeta^2}{l_3^2} = \frac{4}{\lambda^2}. \quad (9)$$

Door deze betrekking worden bij gegeven waarde van λ , waarden van ξ , η , ζ bepaald, die door verg. (8) de richting aangeven van acht evenwijdige stralen, die met elkaar samengesteld

een stelsel staande golven opleveren, dat binnen het parallelepipedum bestaan kan.

Het verdient hierbij opmerking dat, als α, β, γ vast staan, de richting $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ voor het eerste golfstelsel nog willekeurig gekozen kan worden, mits die richting loodrecht op de voortplantingsrichting staat. Aan elk stelsel waarden van α, β, γ beantwoordt dus nog meer dan één elementaire bewegingstoestand en wel zijn twee dier toestanden onafhankelijk van elkaar.

Wij kiezen deze zoo, dat hun trillingsrichtingen loodrecht op elkaar staan.

Hebben wij voor de ééne bewegingswijze met inachtneming van de voorwaarde

$$\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1 = 0$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ willekeurig gekozen, dan zullen de door (2) bepaalde groottheden $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ de richtingscosinussen der electriche kracht bij het eerste golfstelsel der tweede bewegingswijze zijn. Men verkrijgt dus deze bewegingswijze als men in (6) $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ door $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ vervangt. Tevens moet men dan in (7) $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ door $-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1$ vervangen.

Wij zullen de twee bewegingstoestanden, waarvan hier sprake is, „onderling loodrecht gepolariseerd” noemen. De waarde van n en van α, β, γ zijn bij beide dezelfde, maar de groottheid p , die de phase bepaalt, kan voor den eersten een andere waarde hebben dan voor den anderen.

Wij kunnen nu ter berekening van de energie van het stralingsveld het theorema van de aequipartitie der energie toepassen, doch zullen daartoe moeten aantonen, dat de elementaire bewegingstoestanden, die wij hebben leeren kennen, overeenkomen met de z.g.n. principale trillingen van een mechanisch systeem en dat dus de energie van het geheele systeem gevonden kan worden door sommatie van de energie der elementaire bewegingswijzen, terwijl voor iedere elementaire bewegingswijze zelf de gemiddelde waarde der kinetische en potentiële energie over een periode aan elkaar gelijk zijn.

Wat vooreerst dit laatste betreft, merken wij op, dat wij bij het bepalen der electriche energie voor den door (6) voorgestelden toestand, d.w.z. van de integraal

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{d}^2 dS$$

uitgestrekt over het geheele parallelepipedum, voor de integralen

$$\int_0^{l_1} \cos^2 \frac{\xi \pi x}{l_1} dx \text{ en } \int_0^{l_1} \sin^2 \frac{\xi \pi x}{l_1} dx \quad (10)$$

de waarde $\frac{1}{2} l_1$ verkrijgen. De overeenkomstige integralen met y en z hebben de waarde $\frac{1}{2} l_2$ en $\frac{1}{2} l_3$, terwijl men $\cos^2 (nt + p)$ door $\frac{1}{2}$ mag vervangen. De gezochte electriche energie wordt dientengevolge $2 a^2 l_1 l_2 l_3$ en dezelfde uitkomst vindt men uit (7) ook voor de magnetische energie

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{h}^2 dS.$$

Verder moeten wij aantonen, dat telkens wanneer \mathbf{d} , \mathbf{h} en \mathbf{d}' , \mathbf{h}' op twee verschillende elementaire toestanden betrekking hebben, de integralen

$$\left. \begin{array}{l} \int (\mathbf{d}_x \mathbf{d}_{x'} + \mathbf{d}_y \mathbf{d}_{y'} + \mathbf{d}_z \mathbf{d}_{z'}) dS \\ \text{en} \\ \int (\mathbf{h}_x \mathbf{h}_{x'} + \mathbf{h}_y \mathbf{h}_{y'} + \mathbf{h}_z \mathbf{h}_{z'}) dS \end{array} \right\} \quad (11)$$

uitgestrekt over het parallelepipedum verdwijnen.

Beschouwt men in de eerste plaats twee onderling loodrecht gepolariseerde toestanden, (met dezelfde waarden van n , ξ , η , ζ maar met verschillende p 's), dan zal men, als men hetgeen boven over de integralen (10) en de daarmee overeenstemmende gezegd

is, in aanmerking neemt, tot uitdrukkingen komen, die den faktor

$$\alpha \alpha_2 + \beta \beta_2 + \gamma \gamma_2 = 0$$

bevatten en daarom verdwijnen.

In elk ander geval hebben althans niet alle drie grootheden ξ, η, ζ voor de beide toestanden dezelfde waarde.

De integralen (11) zullen dan verdwijnen, omdat daarvoor reeds de ongelijkheid van een der drie grootheden voldoende is. Gelden bijv. voor de twee toestanden de waarden ξ en ξ' , dan komt men bij de berekening van (11) tot de integralen

$$\int_0^{l_1} \cos \frac{\xi \pi x}{l_1} \cos \frac{\xi' \pi x}{l_1} dx \quad \text{en} \quad \int_0^{l_1} \sin \frac{\xi \pi x}{l_1} \sin \frac{\xi' \pi x}{l_1} dx.$$

Bedenkt men dat ξ en ξ' geheele getallen zijn, dan ziet men gemakkelijk in, dat deze integralen nul zijn, zoodra ξ en ξ' van elkaar verschillen.

Het is nu geoorloofd het principe van JEANS toe te passen, zoodat wij ter berekening van de energie, die in het parallelepipedum tengevolge van stralen met golflengten tusschen λ en $\lambda + d\lambda$ aanwezig is, slechts het aantal waarden van ξ, η, ζ te bepalen hebben, welke aan verg. (9) voldoen, wanneer de golflengte tusschen die grenzen ligt.

Iedere waarde van ξ, η, ζ bepaalt dan twee mogelijke stralings-toestanden, n.l. de twee bovengenoemde onderling loodrecht gepolariseerde en komt dus overeen met twee graden van vrijheid, terwijl aan iederen graad van vrijheid, zoowel voor de kinetische als voor de potentiële energie, $\frac{1}{2} \alpha T$ moet worden toegekend.

Hieruit volgt, dat als ν het aantal waarden is, dat voor ξ, η, ζ gevonden wordt, de totale energie

$$\nu \times \frac{4}{3} \alpha T \tag{12}$$

bedraagt.

Ter berekening van het aantal waarden van ξ, η, ζ stellen wij

$$\begin{aligned}l_2 l_3 \xi &= \xi_1 \\l_3 l_1 \eta &= \eta_1 \\l_1 l_2 \zeta &= \zeta_1.\end{aligned}\tag{13}$$

Hierdoor gaat verg. (9) over in

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \frac{4 l_1^2 l_2^2 l_3^2}{\lambda^2},\tag{14}$$

zoodat wij het aantal waarden van ξ_1, η_1, ζ_1 te bepalen hebben, welke resp. veelvouden zijn van $l_2 l_3, l_3 l_1, l_1 l_2$ en aan verg. (14) voldoen.

Wij kunnen hiertoe eerst vragen naar het aantal waarden van ξ_1, η_1, ζ_1 , waarvoor λ grooter is dan een gegeven waarde λ_0 .

Stellen wij $\frac{2 l_1 l_2 l_3}{\lambda_0} = \varrho_0$, dan moet, opdat $\lambda > \lambda_0$, $\frac{2 l_1 l_2 l_3}{\lambda}$ kleiner zijn dan ϱ_0 en dus

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 < \varrho_0^2.\tag{15}$$

Beschouwen wij nu een bol met ϱ_0 tot straal, dan zullen de waarden van ξ_1, η_1, ζ_1 , die aan (15) voldoen, gegeven worden door de punten, die binnen den bol liggen en wier coördinaten t.o.z. van een rechthoekig assenstelsel door het middelpunt van den bol veelvouden zijn van $l_2 l_3, l_3 l_1$ en $l_1 l_2$.

Deze punten kunnen beschouwd worden als hoekpunten van parallelepipeda, wier gezamenlijke inhoud, mits hun aantal groot genoeg is, gelijkgesteld mag worden aan den inhoud van een octant van den bol.

Hiertoe is slechts noodig, dat de afmetingen der parallelepipeda klein zijn t. o. z. van den straal van den bol, wat meebrengt, dat λ_0 klein moet zijn t. o. z. van l_1, l_2, l_3 .

Onze beschouwingen gelden dus voor stralen, wier golflengte klein zijn t.o.z. van de afmetingen van het parallelepipedum.

Voor het aantal stellen waarden van ξ_1, η_1, ζ_1 , waarvoor $\lambda > \lambda_0$ is, vinden wij dus

$$\frac{1}{6} \pi \frac{\rho_0^3}{l_1^2 l_2^2 l_3^2} = \frac{4}{3} \pi \frac{l_1 l_2 l_3}{\lambda_0^3}.$$

Het gezochte aantal waarden van ξ, η, ζ , waarbij λ ligt tusschen λ en $\lambda + d\lambda$, bedraagt dus

$$4 \pi \frac{l_1 l_2 l_3}{\lambda^4} d\lambda.$$

De energie der zwarte straling binnen het parallelepipedum is dus volgens (12)

$$\frac{16 \pi \alpha T}{3 \lambda^4} l_1 l_2 l_3 d\lambda$$

en de energie per volume-eenheid

$$\frac{16 \pi \alpha T}{3 \lambda^4} d\lambda. \quad (16)$$

§ 2.

Nadere beschouwing van het stralingsveld.

Volgens de theorie der warmtestraling moet het veld, voor zoover het voor waarneming toegankelijk is, stationair, homogeen en isotroop zijn.

Daar de waarnemer slechts tijden kan meten, die vele perioden der zeer snelle trillingen bevatten, is voor het stationair zijn vereischt, dat de gemiddelde waarde der energie over een tijd, die groot is t.o.z. van de periode, onafhankelijk is van den tijd. Daar de uitdrukking, die wij voor de energie gevonden hebben, alleen $\sin^2 nt$ en $\cos^2 nt$ bevat, is aan bovenstaande voorwaarde voldaan.

Daar evenmin de energiemeting uitgestrekt kan worden over de orde van grootte van de kleine golflengten, zal het veld homogeen genoemd worden, wanneer de gemiddelde waarde der energie

over een volume-eenheid, waarvan de afmetingen groot zijn t.o.z. van de golflengte, onafhankelijk is van de plaats van het element. Dat dit werkelijk het geval is, ziet men gemakkelijk in door aan de volume-eenheid een eenvoudige gedaante toe te kennen, b.v. die van een rechthoekig parallelepipedum met de ribben evenwijdig aan de coördinaatassen. Laat x, y, z de coördinaten van het middelpunt zijn en s_1, s_2, s_3 de lengten der ribben. Dan wordt de energie in het parallelepipedum gegeven door

$$\frac{1}{2} \int_{x - \frac{1}{2} s_1}^{x + \frac{1}{2} s_1} \int_{y - \frac{1}{2} s_2}^{y + \frac{1}{2} s_2} \int_{z - \frac{1}{2} s_3}^{z + \frac{1}{2} s_3} (\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2) dx dy dz.$$

Men kan nu gemakkelijk aantonen, dat, wanneer s_1, s_2, s_3 in vergelijking met de golflengte zeer groot zijn, van de deelen dezer uitdrukking, die van de superpositie der verschillende in (6) en (7) voorkomende toestanden afhankelijk zijn, mag worden afgezien, zoodat men ook nu weder (evenals voor het geheele parallelepipedum $l_1 l_2 l_3$) slechts de som behoeft te nemen van de waarden, die deze toestanden ieder op zich zelf voor de energie opleveren.

Wat verder deze waarden betreft, merken wij op, dat één daarvan, voor zoover zij van \mathbf{d}_x afhangt, kan worden voorgesteld door

$$32 a^2 a_1^2 \int_{x - \frac{1}{2} s_1}^{x + \frac{1}{2} s_1} \cos^2 \frac{\xi \pi x}{l_1} dx \int_{y - \frac{1}{2} s_2}^{y + \frac{1}{2} s_2} \sin^2 \frac{\eta \pi y}{l_2} dy \int_{z - \frac{1}{2} s_3}^{z + \frac{1}{2} s_3} \sin^2 \frac{\zeta \pi z}{l_3} dz,$$

waarbij $\cos^2 nt$ door $\frac{1}{2}$ vervangen is.

De waarde van deze uitdrukking is

$$4 a^2 a_1^2 s_1 s_2 s_3 \left(1 + \frac{\sin k_1}{k_1} \cos \frac{2 \xi \pi x}{l_1} \right) \left(1 - \frac{\sin k_2}{k_2} \cos \frac{2 \eta \pi y}{l_2} \right) \left(1 - \frac{\sin k_3}{k_3} \cos \frac{2 \zeta \pi z}{l_3} \right). \quad (17)$$

waarin $k_1 = \frac{\xi \pi s_1}{l_1}$, $k_2 = \frac{\eta \pi s_2}{l_2}$, $k_3 = \frac{\zeta \pi s_3}{l_3}$ gesteld is.

Nu is de golflengte λ bepaald door

$$\frac{4}{\lambda^2} = \frac{\xi^2}{l_1^2} + \frac{\eta^2}{l_2^2} + \frac{\zeta^2}{l_3^2},$$

terwijl wij mogen afzien van die gevallen, waarin één der grootheden $\frac{\xi}{l_1}$, $\frac{\eta}{l_2}$, $\frac{\zeta}{l_3}$ veel kleiner is dan de beide andere, of waarin twee dezer grootheden bijzonder klein zijn. Deze gevallen zijn n.l. zoo zeldzaam, dat zij bij het berekenen van het totale arbeidsvermogen geen gewicht in de schaal leggen. Wij mogen dus aannemen, dat $\frac{\xi}{l_1}$, $\frac{\eta}{l_2}$, $\frac{\zeta}{l_3}$ van de orde $\frac{2}{\lambda}$ zijn. Dan zijn echter k_1 , k_2 , k_3 van de orde $\frac{2\pi s_1}{\lambda}$, $\frac{2\pi s_2}{\lambda}$, $\frac{2\pi s_3}{\lambda}$ en dus tengevolge van onze veronderstelling zeer groot in vergelijking met 2π .

In de uitdrukking (17) zijn derhalve $\frac{\sin k_1}{k_1}$, $\frac{\sin k_2}{k_2}$, $\frac{\sin k_3}{k_3}$ zeer klein in vergelijking met de eenheid. Laat men deze termen weg, dan gaat (17) over in

$$4 a^2 \alpha_1^2 s_1 s_2 s_3,$$

welke uitdrukking onafhankelijk van x , y en z is. Tot hetzelfde besluit komt men, als men de deelen van het arbeidsvermogen beschouwt, die van d_y , d_z of van de magnetische kracht afhangen. Daarmede is het gestelde bewezen.

Ten slotte moet worden aangetoond, dat de gevonden stralings-toestand isotroop is, waarmede bedoeld wordt, dat de straling door een vlakke-element $d\sigma$ in richtingen, die binnen een oneindig smallen, loodrecht op dat element staanden kegel $d\omega$ liggen, bij bepaalde grootte van $d\sigma$ en $d\omega$ onafhankelijk is van de richting van het vlakke-element.

Nu moet vooreerst worden opgemerkt, dat de formules (6)

en (7) stelsels van staande golven voorstellen en dat dus in die formules geen sprake meer is van voortplanting in een bepaalde richting. Wij komen er echter toe ons die voor te stellen, wanneer wij den door (6) en (7) beschreven toestand (of één der door (6) en (7) beschreven toestanden), in acht stelsels van loopende golven ontbinden, die alle de amplitudo a hebben, en waarvan de voortplantingsrichting kan worden voorgesteld door

$$(\alpha, \beta, \gamma), (-\alpha, \beta, \gamma), (\alpha, -\beta, \gamma), (\alpha, \beta, -\gamma), (\alpha, -\beta, -\gamma), \\ (-\alpha, \beta, -\gamma), (-\alpha, -\beta, \gamma), (-\alpha, -\beta, -\gamma).$$

(Verg. pag. 8.)

Passen wij deze ontbinding bij al de beschouwde bewegings-toestanden toe, dan zien wij, dat wij inderdaad met een voortplanting in een groot aantal richtingen te doen hebben.

Daar wij verder aan al de stelsels staande golven dezelfde energie moeten toekennen, moet ook aan al de stelsels loopende golven dezelfde intensiteit worden toegekend.

Aan de voorwaarde der isotropie zal, zooals men gemakkelijk inziet, voldaan zijn, als de voortplantingsrichtingen gelijkmatig verdeeld zijn, d. w. z. als het aantal daarvan, dat binnen een kegel van bepaalde opening $d\omega$ valt, onafhankelijk is van de richting van dien kegel.

Nu is volgens (8)

$$a = \frac{\xi \lambda}{2l_1},$$

waarvoor wij kunnen schrijven

$$a = \frac{\xi l_2 l_3}{2l_1 l_2 l_3} \lambda$$

of volgens (13) en

$$\frac{2l_1 l_2 l_3}{\lambda} = \varrho$$

$$a = \frac{\xi_1}{\varrho}.$$

Evenzoo vinden wij

$$\beta = \frac{\eta_1}{\rho}$$

$$\gamma = \frac{\zeta_1}{\rho}$$

Hieruit blijkt, dat elke richting (α, β, γ) wordt aangewezen door de verbindingslijn van den oorsprong met één der punten (ξ_1, η_1, ζ_1) .

Evenzoo worden de andere der acht bij (α, β, γ) behorende richtingen door de ligging van zulke punten aangewezen, wanneer men ook negatieve waarden voor ξ, η, ζ en de daaraan beantwoordende voor ξ_1, η_1, ζ_1 toelaat, d. w. z. wanneer de geheele ruimte (en niet slechts een octant) gevuld wordt met punten (ξ, η, ζ) . Deze zijn overal met dezelfde dichtheid over de ruimte verspreid; van de punten (ξ_1, η_1, ζ_1) , die binnen den vroeger beschouwden bol liggen, zullen twee gelijke kegels $d\omega$ van verschillende richting er evenveel bevatten. Daarmede is het gestelde bewezen.

§ 3.

Het parallelepipedum is met een isotroop, ponderabel medium gevuld.

De berekening van de energie der straling binnen een parallelepipedum, dat met een isotroop, ponderabel medium gevuld is, kan met kleine wijziging uit het voorgaande worden afgeleid.

Is ε de diëlectrische constante van het medium, dan zijn de hoofdvergelijkingen van het electromagnetisch veld

$$\text{div } \mathbf{d} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{h} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{h} = \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{e}}$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{h}},$$

waarin \mathbf{e} de electriche kracht is.

Met behulp van de vergelijking

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e}$$

volgt uit bovenstaande vergelijkingen voor ieder der ontbondenen van \mathbf{e} en \mathbf{h} de betrekking

$$\Delta \psi - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Stellen wij $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$, de voortplantingssnelheid in het medium, door s voor, dan wordt door het volgend stel vergelijkingen aan de hoofdvergelijkingen en aan de grensvoorwaarden voor de vlakken $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ voldaan:

$$e_x = -8a a_1 \cos nt \cos \frac{n\alpha x}{s} \sin \frac{n\beta y}{s} \sin \frac{n\gamma z}{s}$$

$$e_y = -8a \beta_1 \cos nt \sin \frac{n\alpha x}{s} \cos \frac{n\beta y}{s} \sin \frac{n\gamma z}{s}$$

$$e_z = -8a \gamma_1 \cos nt \sin \frac{n\alpha x}{s} \sin \frac{n\beta y}{s} \cos \frac{n\gamma z}{s}$$

$$h_x = 8a \sqrt{\varepsilon} a_2 \sin nt \sin \frac{n\alpha x}{s} \cos \frac{n\beta y}{s} \cos \frac{n\gamma z}{s}$$

$$h_y = 8a \sqrt{\varepsilon} \beta_2 \sin nt \cos \frac{n\alpha x}{s} \sin \frac{n\beta y}{s} \cos \frac{n\gamma z}{s}$$

$$h_z = 8a \sqrt{\varepsilon} \gamma_2 \sin nt \cos \frac{n\alpha x}{s} \cos \frac{n\beta y}{s} \sin \frac{n\gamma z}{s}$$

De grensvoorwaarden voor de overige vlakken geven

$$\frac{n\alpha l_1}{s} = \xi \pi$$

$$\frac{n\beta l_2}{s} = \eta \pi$$

$$\frac{n\gamma l_3}{s} = \zeta \pi$$

of, daar $\frac{\pi s}{n} = \frac{1}{2} \lambda$ is,

$$l_1 \alpha = \frac{1}{2} \xi \lambda$$

$$l_2 \beta = \frac{1}{2} \eta \lambda$$

$$l_3 \gamma = \frac{1}{2} \zeta \lambda.$$

Hiermede zijn dezelfde betrekkingen gevonden als in verg. (3) en (4) voor het stralingsveld in den aether.

Wij mogen dus besluiten, dat in het nu beschouwde medium de energie per volume-eenheid, beantwoordende aan stralen met golflengte tusschen λ en $\lambda + d\lambda$, gegeven wordt door

$$\frac{16 \pi \alpha T}{3 \lambda^4} d\lambda.$$

Een verschillend bedrag voor de energiedichtheid in den aether en in het ponderabele medium vinden wij echter, wanneer wij stralen bijeenemen, waarvan niet de golflengte, maar de frequentie tusschen bepaalde grenzen, stel n en $n + dn$, ligt.

Daar in den aether $\lambda = \frac{2\pi c}{n}$ en in het medium $\lambda = \frac{2\pi s}{n}$ is, vinden wij voor de energiedichtheid $\frac{2}{3} \frac{\alpha T}{\pi^2 c^3} n^2 dn$ en $\frac{2}{3} \frac{\alpha T}{\pi^2 s^3} n^2 dn$, waaruit blijkt, dat de dichtheid der energie, welke beantwoordt aan stralen van bepaalde frequentie, omgekeerd evenredig is met de derde macht van de voortplantingssnelheid in het medium.

Hier is dus voor een bijzonder geval de stralingswet afgeleid, die veelal aldus wordt uitgedrukt:

Wanneer in een ruimte waarin verschillende lichamen zijn, thermodynamisch evenwicht bestaat, is de energie tengevolge van stralen van bepaalde frequentie binnen een kubus met afmetingen van een golflengte voor alle lichamen gelijk.

Op dezelfde wijze als voor den aether zal ook voor het ponderabele medium kunnen worden aangetoond, dat het stralingsveld homogeen en isotroop is.

§ 4.

Het parallelepipedum is met een homogeen kristal gevuld.

Denken wij de drie ribben van het parallelepipedum, waarlangs de coördinaatassen gelegd worden, samenvallende met de elektrische symmetrie-assen van het kristal, dan zijn, als ϵ_1 , ϵ_2 en ϵ_3 de diëlectrische constanten voor deze richtingen voorstellen, de vergelijkingen van het electromagnetische veld:

$$\epsilon_1 \frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial x} + \epsilon_2 \frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial y} + \epsilon_3 \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial z} = \frac{\epsilon_1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial x} = \frac{\epsilon_2}{c} \frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial y} = \frac{\epsilon_3}{c} \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{h} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{h}}.$$

Aan deze vergelijkingen wordt voldaan door vlakke golven, die, wanneer hun voortplantingsrichting (α, β, γ) is, een voortplantingssnelheid hebben, welke bepaald is door de vergelijking

$$\frac{\alpha^2}{s^2 - a_1^2} + \frac{\beta^2}{s^2 - b_1^2} + \frac{\gamma^2}{s^2 - c_1^2} = 0, \quad (18)$$

$$\text{waarbij } a_1^2 = \frac{c^2}{\epsilon_1}, \quad b_1^2 = \frac{c^2}{\epsilon_2}, \quad c_1^2 = \frac{c^2}{\epsilon_3}.$$

Voor elke voortplantingsrichting geeft deze vergelijking twee waarden van s en bij elke daarvan behooren bepaalde onderling loodrechte richtingen van de elektrische en magnetische kracht.

De vergelijkingen der staande golven, die aan de grensvoorwaarden voor de vlakken $x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$ voldoen, zijn in dit geval

$$e_x = -8a a_1 \cos nt \cos \frac{n \alpha x}{s} \sin \frac{n \beta y}{s} \sin \frac{n \gamma z}{s}$$

$$e_y = -8a \beta_1 \cos nt \sin \frac{n \alpha x}{s} \cos \frac{n \beta y}{s} \sin \frac{n \gamma z}{s}$$

$$e_z = -8a \gamma_1 \cos nt \sin \frac{n \alpha x}{s} \sin \frac{n \beta y}{s} \cos \frac{n \gamma z}{s}$$

$$h_x = 8a \frac{c}{s'} a_2 \sin nt \sin \frac{n \alpha x}{s} \cos \frac{n \beta y}{s} \cos \frac{n \gamma z}{s}$$

$$h_y = 8a \frac{c}{s'} \beta_2 \sin nt \cos \frac{n \alpha x}{s} \sin \frac{n \beta y}{s} \cos \frac{n \gamma z}{s}$$

$$h_z = 8a \frac{c}{s'} \gamma_2 \sin nt \cos \frac{n \alpha x}{s} \cos \frac{n \beta y}{s} \sin \frac{n \gamma z}{s},$$

waarin s' de voortplantingssnelheid voorstelt van den straal, die bij de golfnormaal (α, β, γ) en de richting (a_1, β_1, γ_1) der electricische kracht behoort.

Aan de grensvoorwaarden voor de vlakken $x = l_1$, $y = l_2$, $z = l_3$ is voldaan, als men heeft

$$\begin{aligned} \frac{n \alpha l_1}{s} &= \xi \pi \\ \frac{n \beta l_2}{s} &= \eta \pi \\ \frac{n \gamma l_3}{s} &= \zeta \pi, \end{aligned} \tag{19}$$

als ξ , η en ζ geheele getallen zijn, die wij weder zonder mogelijke toestanden uit te sluiten positief kunnen stellen. Bij het gebruik maken van deze formules moet wel in het oog worden gehouden, dat s nu geen constante is, maar op de in (18) uitgedrukte wijze van α , β , γ afhangt. Ook moet aan de twee waarden van s worden gedacht, die aan deze vergelijking voldoen; bij elke

daarvan behoort echter slechts één bewegingstoestand met bepaalde $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

Het ligt voor de hand om in dit geval, ter toepassing van het principe van de aequipartitie der energie, te letten op trillingen van bepaalde frequentie inplaats van bepaalde golflengte en dus te zoeken naar het aantal bewegingswijzen, waarvoor de frequentie ligt tusschen de grenzen n en $n + dn$. De golflengte denken wij ons daarbij steeds zeer klein in vergelijking met l_1, l_2, l_3 .

Met behulp van de verg. (19) en de betrekking $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, vinden wij

$$\frac{\xi^2}{l_1^2} + \frac{\eta^2}{l_2^2} + \frac{\zeta^2}{l_3^2} = \frac{n^2}{\pi^2 s^2}.$$

Stellen wij weer

$$\begin{aligned}\xi_1 &= l_2 l_3 \xi \\ \eta_1 &= l_3 l_1 \eta \\ \zeta_1 &= l_1 l_2 \zeta,\end{aligned}$$

dan vinden wij ook hier

$$\sqrt{(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)} = \frac{n}{\pi s} l_1 l_2 l_3.$$

Beschouwen wij weer ξ_1, η_1 en ζ_1 als coördinaten van punten, dan zullen bewegingstoestanden met frequentie der trillingen kleiner dan n overeenkomen met punten binnen een oppervlak, dat tot vergelijking heeft

$$\varrho = \frac{C}{s}, \tag{20}$$

wanneer ϱ de voerstraal is en $C = \frac{n}{\pi} l_1 l_2 l_3$. (21)

Ook hier valt de richting van den voerstraal samen met de voortplantingssnelheid der golven, daar $\frac{\xi_1}{\varrho} = \frac{\xi_1 \pi s}{n l_1 l_2 l_3} = \frac{\xi \pi s}{n l_1} = \alpha$ en evenzoo $\frac{\eta_1}{\varrho} = \beta$ en $\frac{\zeta_1}{\varrho} = \gamma$ is.

Substitueert men de uit (20) volgende waarde $s = \frac{C}{\varrho}$ in verg. (18), dan komt er

$$\frac{\alpha^2}{C^2 - a_1^2 \varrho^2} + \frac{\beta^2}{C^2 - b_1^2 \varrho^2} + \frac{\gamma^2}{C^2 - c_1^2 \varrho^2} = 0,$$

wat als vergelijking van het bedoelde oppervlak beschouwd kan worden. Dit oppervlak is tweebledig en elk blad begrenst een zekere ruimte, die door de coördinaatassen in gelijke deelen verdeeld wordt. Is I de som der octanten, die bij het eene en het andere blad behooren, dan is het aantal waarden van ξ, η, ζ , waarbij de frequentie kleiner is dan de gekozen waarde $\frac{I}{l_1^2 l_2^2 l_3^2}$.

Het aantal bewegingswijzen, waarbij de frequentie ligt tusschen n en $n + dn$, is dan

$$\frac{1}{l_1^2 l_2^2 l_3^2} \frac{dI}{dn} dn. \quad (22)$$

Wij kunnen ter bepaling van dit aantal bewegingswijzen ook een eenigszins anderen weg inslaan en beginnen met het aantal golven te berekenen, waarvan de voortplantingsrichtingen liggen binnen een kegel met de richting (α, β, γ) tot as en $d\omega$ tot opening, terwijl de frequentie der trillingen ligt tusschen n en $n + dn$. Dit aantal zal overeenkomen met het aantal punten met coördinaten ξ_1, η_1, ζ_1 , welke liggen binnen de twee afgeknotte kegels, die van den kegel worden afgesneden door de oppervlakken

$$\frac{\alpha^2}{C^2 - a_1^2 \varrho^2} + \frac{\beta^2}{C^2 - b_1^2 \varrho^2} + \frac{\gamma^2}{C^2 - c_1^2 \varrho^2} = 0 \quad (23)$$

en

$$\frac{\alpha^2}{(C + dC)^2 - a_1^2 \varrho^2} + \frac{\beta^2}{(C + dC)^2 - b_1^2 \varrho^2} + \frac{\gamma^2}{(C + dC)^2 - c_1^2 \varrho^2} = 0, \quad (24)$$

als $C = \frac{n}{\pi} l_1 l_2 l_3$ en $dC = \frac{dn}{\pi} l_1 l_2 l_3$ is.

Den inhoud van één dezer afgeknotte kegels mogen wij, als $d\varrho$ het tusschen de oppervlakken (23) en (24) begrepen deel van den voerstraal is, gelijk stellen aan

$$\varrho^2 d\omega d\varrho.$$

Neemt men (20) en (21) in aanmerking en bedenkt men, dat bij het voortgaan langs den voerstraal α , β , γ constant blijven, zoodat volgens die vergelijkingen

$$d\varrho = \frac{l_1 l_2 l_3}{\pi s} dn$$

is, dan kan men voor de gevonden uitdrukking ook schrijven

$$\frac{n^2}{\pi^3 s^3} l_1^3 l_2^3 l_3^3 dn d\omega. \quad (25)$$

Hieruit blijkt, dat de stralingstoestand in het kristal niet isotroop is, daar de stralingsdichtheid afhangt van de voortplantingsrichting. Daar bij iedere richting bovendien twee waarden van s behooren, vinden wij voor iedere richting twee uitdrukkingen, beantwoordende aan de twee bovengenoemde afgeknotte kegels.

Om het geheele aantal bewegingswijzen te vinden, moeten wij nu de uitdrukking (25), na deeling door $l_1^2 l_2^2 l_3^2$, integreeren over een achtste deel van de ruimte tusschen de oppervlakken (23) en (24), zoodat wij moeten berekenen

$$\frac{n^2}{\pi^3} l_1 l_2 l_3 dn \int \frac{d\omega}{s^3} \quad (26)$$

en wel moeten wij twee dergelijke uitdrukkingen berekenen, voor s eerst den eenen en dan den anderen wortel der verg. (18) nemende.

Men ziet gemakkelijk in, dat de som der twee uitkomsten met (22) pag. 25 zal overeenstemmen.

Voor een éénassig kristal is bovenstaande integraal gemakkelijk te berekenen.

Leggen wij de Z -as langs de optische as van het kristal, dan is $a_1 = b_1$ de voortplantingssnelheid van den gewonen straal,

terwijl de voortplantingssnelheid s van de golf, die bij den buitengewonen straal behoort, bepaald wordt door

$$s^2 = a_1^2 \cos^2 \vartheta + c_1^2 \sin^2 \vartheta,$$

als ϑ de hoek is, dien de golfnormaal met de optische as van het kristal maakt.

Voor den gewonen straal vinden wij voor de integraal in (26)

$$\int \frac{d\omega}{s^3} = \frac{\pi}{2a_1^3}.$$

Het aantal bewegingswijzen, voor zoover het de gewone stralen betreft, is dus

$$\frac{n^2}{2\pi^2} \frac{l_1 l_2 l_3}{a_1^3} dn,$$

zoodat ook nu weer de energie omgekeerd evenredig wordt met de derde macht van de voortplantingssnelheid.

Voor den buitengewonen straal kan voor de integraal in (26) geschreven worden

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{(a_1^2 \cos^2 \vartheta + c_1^2 \sin^2 \vartheta)^3}},$$

waarvoor men gemakkelijk vindt

$$\frac{\pi}{2a_1 c_1^2}.$$

Het gezochte aantal bewegingswijzen is dus volgens (26)

$$\frac{n^2 dn}{2\pi^2 a_1 c_1^2} l_1 l_2 l_3.$$

Volgens het principe van JEANS vinden wij dus voor de energie per volume-eenheid tengevolge van de buitengewone stralen

$$\frac{\alpha T}{3\pi^2 a_1 c_1^2} n^2 dn$$

en voor de totale energie per volume-eenheid

$$\frac{\alpha T}{3 \pi^2} \left(\frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_1 c_1^2} \right) n^2 dn.$$

Hierbij is in aanmerking genomen, dat ook in een kristal bij elk golfstelsel de electricische en magnetische energie evenveel bedragen, zoodat voor elken elementairen bewegingstoestand de energiehoeveelheid $\frac{2}{3} \alpha T$ in rekening moet worden gebracht. (Verg. § 1, pag. 13). Stelt men a_1 en c_1 aan elkaar gelijk, dan komt men tot de vroeger (§ 3, pag. 21) voor een isotroop medium verkregen uitkomst terug.

Voor een tweessig kristal is het moeilijker de integraal in (26) te berekenen.

Zonder ons daar verder mede bezig te houden, kunnen wij nog opmerken, dat de in (25) uitgedrukte uitkomst in overeenstemming is met die van andere beschouwingen.

Volgens (25) is n.l. de dichtheid der energie, beantwoordende aan dn , $d\omega$ en aan één trillingsrichting

$$\frac{2}{3} \alpha T \frac{n^2}{\pi^2 s^3} dn d\omega, \quad (27)$$

waarbij wij eraan herinneren, dat $d\omega$ een kegel voor de golfnormaal is en s de voortplantingssnelheid der golven.

De overeenkomstige uitdrukking voor den aether, als men zich beperkt tot één der beide loodrecht op elkaar staande trillingsrichtingen, die bij vastgestelde voortplantingsrichting kunnen worden aangenomen, verkrijgt men uit (27), als men s^3 door c^3 vervangt. De twee uitdrukkingen staan dan tot elkaar als $\frac{1}{s^3}$ en $\frac{1}{c^3}$, wat ook LORENTZ*) heeft gevonden door beschouwing van den overgang der stralen van het eene in het andere medium.

*) H. A. LORENTZ, Zittingsverslagen der Akad. v. Wet. (1896) pag. 305.

§ 5.

Het parallelepipedum is door een vlak evenwijdig aan een der zijwanden in twee deelen verdeeld, welke ieder met een verschillend isotroop medium gevuld zijn.

Het scheidingsvlak nemen wij tot YZ -vlak, terwijl het parallelepipedum verder begrensd wordt door de vlakken $x=p_1$, $x=-p_2$, $y=0$, $y=q$, $z=0$, $z=r$.

Verder zullen alle grootheden, die op het eerste medium betrekking hebben, worden aangegeven met den index 1, die, welke op het tweede medium betrekking hebben met den index 2.

Wij beschouwen den toestand die in het eerste medium ontstaat en kiezen dit, terwille van de algemeenheid der oplossing, als het optisch dichtere, zoodat stralen die zich in het eerste medium voortplanten, aan het scheidingsvlak voor een deel gebroken en voor een ander deel teruggekaatst, of wel totaal teruggekaatst kunnen worden. Om de vergelijkingen zoo eenvoudig mogelijk te doen zijn, denken wij de stralen gepolariseerd in het vlak, dat door den straal en de normaal van het scheidingsvlak (de X -as) gebracht kan worden. Wij vinden dan de helft van het aantal mogelijke bewegingswijzen.

Denken wij nu een bundel evenwijdige stralen met richtingscosinussen — α , β , γ , welke onder een hoek grooter dan de grenshoek op het scheidingsvlak invallen, zoodat zij totaal gereflecteerd worden, dan zullen door terugkaatsing tegen de volkomen spiegelende wanden en tegen het scheidingsvlak acht bundels evenwijdige stralen ontstaan, welke door de volgende vergelijkingen bepaald worden:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= a \gamma \cos n \left(t - \frac{-\alpha x + \beta y + \gamma z}{v_1} + u \right) \\ e_z &= -a \beta \cos n \left(t - \frac{-\alpha x + \beta y + \gamma z}{v_1} + u \right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= a \gamma \cos n \left(t - \frac{ax + \beta y + \gamma z}{v_1} + u + 2g \right) \\ e_z &= -a \beta \cos n \left(t - \frac{ax + \beta y + \gamma z}{v_1} + u + 2g \right) \end{aligned} \right\} (28 a)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= a \gamma \cos n \left(t - \frac{-ax - \beta y + \gamma z}{v_1} + u \right) \\ e_z &= a \beta \cos n \left(t - \frac{-ax - \beta y + \gamma z}{v_1} + u \right) \end{aligned} \right\} (29)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= a \gamma \cos n \left(t - \frac{ax - \beta y + \gamma z}{v_1} + u + 2g \right) \\ e_z &= a \beta \cos n \left(t - \frac{ax - \beta y + \gamma z}{v_1} + u + 2g \right) \end{aligned} \right\} (29 a)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= -a \gamma \cos n \left(t - \frac{-ax + \beta y - \gamma z}{v_1} + u \right) \\ e_z &= -a \beta \cos n \left(t - \frac{-ax + \beta y - \gamma z}{v_1} + u \right) \end{aligned} \right\} (30)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= -a \gamma \cos n \left(t - \frac{ax + \beta y - \gamma z}{v_1} + u + 2g \right) \\ e_z &= -a \beta \cos n \left(t - \frac{ax + \beta y - \gamma z}{v_1} + u + 2g \right) \end{aligned} \right\} (30 a)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= -a \gamma \cos n \left(t - \frac{-ax - \beta y - \gamma z}{v_1} + u \right) \\ e_z &= a \beta \cos n \left(t - \frac{-ax - \beta y - \gamma z}{v_1} + u \right) \end{aligned} \right\} (31)$$

$$\left. \begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= -a \gamma \cos n \left(t - \frac{ax - \beta y - \gamma z}{v_1} + u + 2g \right) \\ e_z &= a \beta \cos n \left(t - \frac{ax - \beta y - \gamma z}{v_1} + u + 2g \right) \end{aligned} \right\} (31 a)$$

Hierbij gaan de stralen, die door de vergelijkingen (28), (29), (30) (31) zijn aangegeven, in elkaar over door terugkaatsing tegen de volkomen spiegelende wanden; evenzoo die, welke zijn aangegeven door de vergelijkingen (28a), (29a), (30a), (31a).

De vergelijkingen zijn zoo opgesteld, dat zij tezamen aan de grensvoorwaarden voor de vlakken $y=0$ en $z=0$ voldoen.

Verder ontstaat de golf (28a) uit (28), (29a) uit (29), (30a) uit (30), (31a) uit (31) door terugkaatsing tegen het scheidingsvlak $x=0$. Deze zijn dus twee aan twee verbonden door de wetten der totale terugkaatsing, verschillen daarom niet in amplitudo, doch wel in phase, terwijl het phaseverschil bepaald wordt door de vergelijking

$$\operatorname{tg}ng = \sqrt{\frac{v_2^2 (1 - a^2) - v_1^2}{v_2 a}}.$$

Uit deze loopende golven ontstaat het volgend stelsel staande golven:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= 8 \alpha \gamma \sin n(t+u+g) \cos n \left(\frac{\alpha x}{v_1} - g \right) \cos \frac{n \beta y}{v_1} \sin \frac{n \gamma z}{v_1} \\ e_z &= -8 \alpha \beta \sin n(t+u+g) \sin n \left(\frac{\alpha x}{v_1} - g \right) \sin \frac{n \beta y}{v_1} \cos \frac{n \gamma z}{v_1} \end{aligned} \right\} (32)$$

De grensvoorwaarden voor de vlakken $x=p_1$, $y=q$, $z=r$ doen het aantal mogelijke bewegingswijzen kennen. Deze worden dus gevonden uit de vergelijkingen

$$\cos n \left(\frac{\alpha p_1}{v_1} - g \right) = 0$$

$$\sin \frac{n \beta q}{v_1} = 0$$

$$\sin \frac{n \gamma r}{v_1} = 0$$

of wel

$$\left. \begin{aligned} \frac{n a p_1}{\pi v_1} - g' &= \xi \\ \frac{n \beta q}{\pi v_1} &= \eta \\ \frac{n \gamma r}{\pi v_1} &= \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

waarbij $g' = \frac{n}{\pi} g + \frac{1}{2}$ is en ξ, η, ζ alle mogelijke positieve geheele waarden kunnen doorloopen.

Het ligt voor de hand om hier te bepalen het aantal stralen, die met de normaal op het scheidingsvlak een hoek maken, welke ligt tusschen de grenzen ϑ en $\vartheta + d\vartheta$, terwijl de frequentie der trillingen ligt tusschen n en $n + dn$.

Stellen wij hiertoe

$$\frac{n p_1 q r}{\pi v_1} = \varrho,$$

$$\xi q r = \xi_1, \quad \eta r p_1 = \eta_1, \quad \zeta p_1 q = \zeta_1,$$

$$q r g' = h,$$

$$a = \cos \vartheta, \quad \beta = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \gamma = \sin \vartheta \sin \varphi,$$

dan worden de vergelijkingen (33)

$$\varrho \cos \vartheta - h = \xi_1$$

$$\varrho \sin \vartheta \cos \varphi = \eta_1$$

$$\varrho \sin \vartheta \sin \varphi = \zeta_1.$$

Wij bepalen nu vooreerst het aantal waarden van ξ_1, η_1, ζ_1 , welke resp. veelvouden zijn van $q r, r p_1, p_1 q$, wanneer ϱ ligt tusschen ϱ en $\varrho + d\varrho$, ϑ tusschen ϑ en $\vartheta + d\vartheta$ en φ tusschen φ en $\varphi + d\varphi$.

Beschouwt men ξ_1, η_1, ζ_1 als coördinaten van een punt, dan beantwoordt aan de door $d\varrho, d\vartheta, d\varphi$ bepaalde speelruimte een zeker volume-element dS . De mogelijke bewegingswijzen beantwoorden nu aan punten, waarvan de coördinaten veelvouden van $q r, r p_1$ en $p_1 q$ zijn; om het aantal daarvan te vinden, moet men dus de grootte van dS door $p_1^2 q^2 r^2$ deelen.

Nu is

$$dS = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & , & \sin \vartheta \cos \varphi, & \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\varrho \sin \vartheta - \frac{dh}{d\vartheta} & , & \varrho \cos \vartheta \cos \varphi, & \varrho \cos \vartheta \sin \varphi \\ 0 & , & -\varrho \sin \vartheta \sin \varphi, & \varrho \sin \vartheta \cos \varphi \end{vmatrix} d\varrho d\vartheta d\varphi.$$

Men ziet gemakkelijk in, dat, als de afmetingen p, q, r zeer groot zijn in vergelijking met de golflengte, $\varrho \frac{dh}{d\vartheta} \sin^2 \vartheta$ tegenover $\varrho^2 \sin \vartheta$ verwaarloosd mag worden, zoodat $dS = \varrho^2 \sin \vartheta d\varrho d\vartheta d\varphi$ wordt.

Door verder naar φ te integreeren van 0 tot $\frac{\pi}{2}$, wordt voor het aantal bewegingswijzen, aan de speelruimte $d\varrho d\vartheta$ beantwoordende, gevonden

$$\frac{\pi \varrho^2 \sin \vartheta d\varrho d\vartheta}{2 p_1^2 q^2 r^2}$$

of, daar

$$\varrho = \frac{n p_1 q r}{\pi v_1}$$

is,

$$\frac{n^2 p_1 q r \sin \vartheta d\vartheta dn}{2 \pi^2 v_1^3}.$$

Men verkrijgt dezelfde uitkomst voor stralen, die bij de terugkaatsing op het scheidingsvlak loodrecht op het invalsvlak gepolariseerd zijn en alles samengenomen zal dus tengevolge van de stralen, die op het scheidingsvlak totaal teruggekaatst worden, in het eerste medium een hoeveelheid energie aanwezig zijn:

$$\frac{2}{3} \alpha T p_1 q r \frac{n^2 dn}{\pi^2 v_1^3} \int_{\psi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$\frac{2}{3} \alpha T p_1 q r \frac{n^2 dn}{\pi^2 v_1^3} \cos \psi, \quad (34)$$

waarbij ψ den grenshoek voorstelt.

Er blijft nu over die stralen te beschouwen, welke op het scheidingsvlak invallen onder een hoek, die kleiner is dan de grenshoek.

Denken wij ook hier vooreerst aan een stelsel loopende golven, die zich in de richting $-\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ in het eerste medium voortplanten, dan ontstaan weer door terugkaatsing acht stelsels loopende golven. Hiervoor gelden, indien wij weer aannemen dat de stralen gepolariseerd zijn in een vlak door de X -as, de vergelijkingen (28), (29), (30), (31), wanneer α, β, γ door $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ vervangen worden. Verder kunnen wij hieraan toevoegen vergelijkingen, die met (28a), (29a), (30a), (31a) overeenkomen; de daarin voorkomende amplitudo en phase laten wij voorloopig onbepaald.

Wij komen op deze wijze tot de volgende vergelijkingen voor de staande golven in het eerste medium:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= 4 \gamma_1 (a \sin \chi_1 + a' \sin \chi_1') \cos \frac{n \beta_1 y}{v_1} \sin \frac{n \gamma_1 z}{v_1} \\ e_z &= -4 \beta_1 (a \sin \chi_1 + a' \sin \chi_1') \sin \frac{n \beta_1 y}{v_1} \cos \frac{n \gamma_1 z}{v_1} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

De vergelijkingen voor de magnetische kracht, die hierbij behooren, zijn

$$\left. \begin{aligned} h_x &= -4 \frac{c}{v_1} (\beta_1^2 + \gamma_1^2) (a \cos \chi_1 + a' \cos \chi_1') \cos \frac{n \beta_1 y}{v_1} \cos \frac{n \gamma_1 z}{v_1} \\ h_y &= -4 \frac{c}{v_1} \alpha_1 \beta_1 (a \sin \chi_1 - a' \sin \chi_1') \sin \frac{n \beta_1 y}{v_1} \cos \frac{n \gamma_1 z}{v_1} \\ h_z &= -4 \frac{c}{v_1} \alpha_1 \gamma_1 (a \sin \chi_1 - a' \sin \chi_1') \cos \frac{n \beta_1 y}{v_1} \sin \frac{n \gamma_1 z}{v_1} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

De staande golven in het tweede medium worden evenzoo bepaald door

$$\left. \begin{aligned} e_x &= 0 \\ e_y &= 4 \gamma_2 (b \sin \chi_2 + b' \sin \chi_2') \cos \frac{n \beta_2 y}{v_2} \sin \frac{n \gamma_2 z}{v_2} \\ e_z &= -4 \beta_2 (b \sin \chi_2 + b' \sin \chi_2') \sin \frac{n \beta_2 y}{v_2} \cos \frac{n \gamma_2 z}{v_2} \end{aligned} \right\} \quad (35a)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}_x &= -4 \frac{c}{v_2} (\beta_2^2 + \gamma_2^2) (b \cos \chi_2 + b' \cos \chi_2') \cos \frac{n \beta_2 y}{v_2} \cos \frac{n \gamma_2 z}{v_2} \\ \mathbf{h}_y &= -4 \frac{c}{v_2} \alpha_2 \beta_2 (b \sin \chi_2 - b' \sin \chi_2') \sin \frac{n \beta_2 y}{v_2} \cos \frac{n \gamma_2 z}{v_2} \\ \mathbf{h}_z &= -4 \frac{c}{v_2} \alpha_2 \gamma_2 (b \sin \chi_2 - b' \sin \chi_2') \cos \frac{n \beta_2 y}{v_2} \sin \frac{n \gamma_2 z}{v_2} \end{aligned} \right\} (36 a)$$

waarbij ter verkorting gesteld is

$$n \left(t + \frac{\alpha_1 x}{v_1} + u_1 \right) = \chi_1, \quad n \left(t - \frac{\alpha_1 x}{v_1} + u_1' \right) = \chi_1',$$

$$n \left(t + \frac{\alpha_2 x}{v_2} + u_2 \right) = \chi_2, \quad n \left(t - \frac{\alpha_2 x}{v_2} + u_2' \right) = \chi_2'.$$

De voorwaarden aan de verschillende grensvlakken zullen betrekkingen geven tusschen de ingevoerde amplituden en fasen en bovendien het aantal mogelijke bewegingswijzen doen kennen.

In de eerste plaats eischt de continuïteit van \mathbf{e} en \mathbf{h} aan het scheidingsvlak $x = 0$, dat

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1}{v_1} &= \frac{\beta_2}{v_2} \\ \frac{\gamma_1}{v_1} &= \frac{\gamma_2}{v_2} \end{aligned} \quad (37)$$

Verder eischen de voorwaarden $\mathbf{e}_z = 0$ aan het volkomen spiegelende vlak $y = q$ en $\mathbf{e}_y = 0$ aan het volkomen spiegelende vlak $z = r$, verg. (37) in aanmerking nemende,

$$\begin{aligned} \frac{n \beta_1 q}{v_1} &= \frac{n \beta_2 q}{v_2} = f \pi \\ \frac{n \gamma_1 r}{v_1} &= \frac{n \gamma_2 r}{v_2} = g \pi, \end{aligned} \quad (38)$$

waarbij f en g geheele positieve getallen zijn.

Bovendien moet voor het eerste medium, aan het grensvlak $x = p_1$, $\mathbf{e}_y = 0$ en $\mathbf{e}_z = 0$ zijn, hetgeen geeft

$$a \sin n \left(t + \frac{\alpha_1 p_1}{v_1} + u_1 \right) + a' \sin n \left(t - \frac{\alpha_1 p_1}{v_1} + u_1' \right) = 0.$$

Daar deze betrekking voor alle waarden van t moet gelden, kan hieraan alleen voldaan worden, wanneer

$$a \cos n \left(\frac{\alpha_1 p_1}{v_1} + u_1 \right) + a' \cos n \left(-\frac{\alpha_1 p_1}{v_1} + u_1' \right) = 0$$

en
$$a \sin n \left(\frac{\alpha_1 p_1}{v_1} + u_1 \right) + a' \sin n \left(-\frac{\alpha_1 p_1}{v_1} + u_1' \right) = 0.$$

Dit eischt $a^2 = a'^2$.

Daar de fasen $n u_1$, $n u_1'$ enz. met π veranderd mogen worden, kunnen wij de teekens van a , a' , b , b' willekeurig kiezen en stellen

$$a' = -a. \quad (39)$$

Dan volgt uit bovenstaande vergelijkingen verder

$$n \left(\frac{\alpha_1 p_1}{v_1} + u_1 \right) = n \left(-\frac{\alpha_1 p_1}{v_1} + u_1' \right) + 2k_1 \pi,$$

waarbij k_1 een geheel getal is.

Wij vinden dus de betrekking

$$\frac{2n \alpha_1 p_1}{v_1} + n (u_1 - u_1') = 2k_1 \pi. \quad (40)$$

Evenzoo moet voor het tweede medium, aan het grensvlak $x = -p_2$, $e_y = 0$ en $e_z = 0$ zijn, waaruit volgt

$$b' = -b \quad (41)$$

en
$$-\frac{2n \alpha_2 p_2}{v_2} + n(u_2 - u_2') = 2k_2 \pi. \quad (42)$$

De doorloopendheid van e_y en e_z aan het vlak $x = 0$ geeft niet alleen de voorwaarden (37), maar eischt ook, dat

$$\begin{aligned} \gamma_1 \{ a \sin n (t + u_1) + a' \sin n (t + u_1') \} = \\ \gamma_2 \{ b \sin n (t + u_2) + b' \sin n (t + u_2') \}. \end{aligned}$$

Dit brengt mee, verg. (37), (39), (41) in aanmerking genomen, dat

$$a v_1 (\cos n u_1 - \cos n u_1') = b v_2 (\cos n u_2 - \cos n u_2')$$

$a v_1 (\sin n u_1 - \sin n u_1') = b v_2 (\sin n u_2 - \sin n u_2')$,
 waaruit ten eerste volgt

$$\operatorname{tg} \frac{n (u_2 + u_2')}{2} = \operatorname{tg} \frac{n (u_1 + u_1')}{2}$$

of

$$n (u_2 + u_2') = n (u_1 + u_1') + 2k_3\pi,$$

waarbij k_3 een geheel getal is.

Wij kunnen $n u_2$ en $n u_2'$ beide met $k_3 \pi$ verminderen, zonder dat wij in strijd komen met hetgeen omtrent het teeken van b en b' is vastgesteld. Keert n.l. daarbij het teeken van b om, dan geschiedt dit ook met het teeken van b' , zoodat verg. (41) blijft gelden. Wij stellen dus

$$u_2 + u_2' = u_1 + u_1'. \quad (43)$$

Uit bovenstaande vergelijkingen volgt dan verder

$$v_1 a \sin \frac{1}{2} n (u_1 - u_1') = v_2 b \sin \frac{1}{2} n (u_2 - u_2'). \quad (44)$$

De continuïteit van e_z aan het scheidingsvlak geeft geen nieuwe voorwaarden, wel die van h_y of h_z .

De eerste eischt, dat

$$4 \frac{c}{v_1} \alpha_1 \beta_1 \left\{ a \sin n (t + u_1) - a' \sin n (t + u_1') \right\} =$$

$$4 \frac{c}{v_2} \alpha_2 \beta_2 \left\{ b \sin n (t + u_2) - b' \sin n (t + u_2') \right\}$$

of, (37), (39), (41) in aanmerking genomen, dat

$$\alpha_1 a (\cos n u_1 + \cos n u_1') = \alpha_2 b (\cos n u_2 + \cos n u_2')$$

$$\alpha_1 a (\sin n u_1 + \sin n u_1') = \alpha_2 b (\sin n u_2 + \sin n u_2').$$

Deze vergelijkingen leiden behalve tot verg. (43) tot de nieuwe betrekking

$$\alpha_1 a \cos \frac{1}{2} n (u_1 - u_1') = \alpha_2 b \cos \frac{1}{2} n (u_2 - u_2'). \quad (45)$$

Uit (44) en (45) volgt verder

$$\frac{v_1}{\alpha_1} \operatorname{tg} \frac{1}{2} n (u_1 - u_1') = \frac{v_2}{\alpha_2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} n (u_2 - u_2') \quad (46)$$

en uit (40) en (42)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} n (u_1 - u_1') = - \operatorname{tg} \frac{n \alpha_1 p_1}{v_1} \quad (47)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} n (u_2 - u_2') = \operatorname{tg} \frac{n \alpha_2 p_2}{v_2}, \quad (48)$$

waardoor verg. (46) overgaat in

$$- \frac{v_1}{\alpha_1} \operatorname{tg} \frac{n \alpha_1 p_1}{v_1} = \frac{v_2}{\alpha_2} \operatorname{tg} \frac{n \alpha_2 p_2}{v_2}. \quad (49)$$

De vergelijkingen (38) en (49) bepalen nu de mogelijke waarden van $\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2$, (dus ook van α_1, α_2) en van n . Iedere aldus gevonden bewegingswijze wordt verder bepaald door de verg. (47), (48) en (42), die, als u_1 willekeurig wordt aangenomen, u_1', u_2 en u_2' doen kennen, terwijl verg. (45) de verhouding van a en b aangeeft.

De energie, die aan den bewegingstoestand beantwoordt, is verspreid over beide media. Berekenen wij de gemiddelde waarde dezer energie over een tijd T , die groot is t. o. z. van de periode, dan wordt de hoeveelheid energie, die in het eerste medium aanwezig is, aangegeven door de integraal

$$\frac{1}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{p_1} \int_0^q \int_0^r \left(\frac{c^2}{v_1^2} \mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2 \right) dt dx dy dz,$$

waarbij \mathbf{e} en \mathbf{h} bepaald worden door de vergelijkingen (35) en (36).

Bij de berekening van deze uitdrukking, moet voor de integratie

naar y $\int_0^q \cos^2 \frac{n \beta_1 y}{v_1} dy$ en $\int_0^q \sin^2 \frac{n \beta_1 y}{v_1} dy$ bepaald worden, welke

integralen volgens verg. (38) beide de waarde $\frac{1}{2} q$ hebben. Zoo ook vindt men bij het integreeren naar z voor

$$\int_0^r \cos^2 \frac{n \gamma_1 z}{v_1} dz \text{ en } \int_0^r \sin^2 \frac{n \gamma_1 z}{v_1} dz \text{ de waarde } \frac{1}{2} r.$$

Bij de integratie naar t kan volgens de veronderstelling, dat T groot is t. o. z. van de periode,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 nt \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 nt \, dt = \frac{1}{2} \text{ en } \int_0^T \sin nt \cos nt \, dt = 0 \text{ gesteld}$$

worden.

De integratie naar x voert, wanneer verg. (39) in aanmerking wordt genomen, tot de integralen

$$\int_0^{p_1} \sin^2 n \left(\frac{\alpha_1 x}{v_1} + \frac{u_1 - u_1'}{2} \right) dx \text{ en } \int_0^{p_1} \cos^2 n \left(\frac{\alpha_1 x}{v_1} + \frac{u_1 - u_1'}{2} \right) dx;$$

voor elke waarde mag geschreven worden $\frac{1}{2} p_1$, zooals men gemakkelijk ziet, als men bedenkt, dat de afmeting p_1 zeer groot is in vergelijking met de golflengte.

Dit alles in aanmerking nemende, vindt men voor de waarde van de energie in het eerste medium

$$4 \frac{c^2}{v_1^2} (1 - \alpha_1^2) p_1 q r a^2. \quad (50)$$

Evenzoo wordt voor de energie, die in het tweede medium zich bevindt, gevonden

$$\frac{1}{2} T \int_0^T \int_{-p_2}^0 \int_0^q \int_0^r \left(\frac{c^2}{v_2^2} e^2 + \mathbf{h}^2 \right) dt \, dx \, dy \, dz =$$

$$\frac{4 c^2}{v_2^2} (1 - a_2^2) p_2 q r b^2. \quad (51)$$

Hieruit blijkt, dat van de energie, die aan den bewegingstoestand beantwoordt, een zeker deel σ , waarvoor uit verg. (50) en (51) met behulp van verg. (37) gevonden wordt

$$\sigma = \frac{p_1 a^2}{p_1 a^2 + p_2 b^2}, \quad (52)$$

in het eerste medium aanwezig is.

Wij zullen nu eerst zoeken naar het aantal bewegingstoestanden, die voldoen aan de vergelijkingen (38) en (49) en waarbij f , g en n liggen tusschen bepaalde grenzen f en $f + df$, g en $g + dg$, n en $n + dn$.

Daar tusschen genoemde grenzen $df dg$ geheele positieve waarden van f en g liggen, zal, wanneer ωdn het aantal oplossingen is van verg. (49) bij bepaalde waarden van f en g , het gezochte aantal zijn

$$\omega \, d n \, d f \, d g. \quad (53)$$

Wij zullen dus beginnen met f en g constant te houden en het interval dn zoo groot nemen, dat $\text{tg} \frac{n \alpha_1 p_1}{v_1}$ en $\text{tg} \frac{n \alpha_2 p_2}{v_2}$ een groot aantal malen van teeken wisselen.

Wij moeten bij de verandering dezer tangenten in het oog houden, dat bij constante waarde van f en g , een verandering van n een verandering van β_1 , γ_1 , β_2 , γ_2 en dus ook van α_1 , α_2 meebrengt.

Daar echter volgens verg. (38) $n\beta_1$ en $n\gamma_1$ constant blijven

en
$$n \alpha_1 = \sqrt{n^2 - (n \beta_1)^2 - (n \gamma_1)^2},$$

is
$$d (n \alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1} d n;$$

evenzoo is
$$d (n \alpha_2) = \frac{1}{\alpha_2} d n .$$

Wij vinden dus

$$\begin{aligned} d \left(\frac{n \alpha_1 p_1}{v_1} \right) &= \frac{p_1}{\alpha_1 v_1} d n \\ d \left(\frac{n \alpha_2 p_2}{v_2} \right) &= \frac{p_2}{\alpha_2 v_2} d n. \end{aligned} \quad (54)$$

Ter bekorting stellen wij

$$\frac{p_1}{a_1 v_1} = h_1, \quad \frac{p_2}{a_2 v_2} = h_2. \quad (55)$$

Laat nu de uitdrukkingen $\frac{n a_1 p_1}{v_1}$ en $\frac{n a_2 p_2}{v_2}$ aan het begin van het interval dn resp. de waarden c_1, c_2 hebben, dan zijn hun waarden, wanneer n een willekeurige aangroeiing ν heeft gekregen, volgens verg. (54) en (55) $c_1 + h_1 \nu$ en $c_2 + h_2 \nu$ en wordt de voorwaarde (49)

$$-\frac{v_1}{a_1} \operatorname{tg} (c_1 + h_1 \nu) = \frac{v_2}{a_2} \operatorname{tg} (c_2 + h_2 \nu). \quad (56)$$

Het is nu de vraag het aantal waarden van ν te vinden die aan (56) voldoen en liggen tusschen 0 en dn .

Wij stellen $\operatorname{tg} (c_1 + h_1 \nu) = t_1$ en $\operatorname{tg} (c_2 + h_2 \nu) = t_2$, beschouwen ν als coördinaat uitgezet langs een rechte lijn van links naar rechts en denken t_1 en t_2 als functie van ν grafisch voorgesteld. Voor de lengte van de lijn schrijven wij L , zoodat $L = dn$.

De eerste tangens t_1 zal afwisselend positief en negatief zijn in intervallen van de lengte $s_1 = \frac{\pi}{2h_1}$, de tweede tangens t_2 in intervallen van de lengte $s_2 = \frac{\pi}{2h_2}$. Volgens hetgeen gezegd is over de grootte van het interval dn , zal de lijn L een groot aantal intervallen s_1 en s_2 bevatten.

Voor verreweg de meeste bewegingswijzen zullen h_1 en h_2 onderling onmeetbaar zijn en geldt dit dus ook voor s_1 en s_2 , zoodat de intervallen s_1 en s_2 op onregelmatige wijze over elkaar liggen en iedere relatieve ligging even groote waarschijnlijkheid heeft.

Wij zoeken naar de waarden van ν , waarbij

$$-\frac{v_1}{a_1} t_1 = \frac{v_2}{a_2} t_2$$

en kunnen dus slechts oplossingen vinden op die gedeelten van de lijn L , waar t_1 en t_2 in teeken verschillen.

Wij zullen nu aantonen, dat op ieder deel van de lijn L , dat behoort tot intervallen s_1 en s_2 met tegengestelde teekens, steeds één wortel van verg. (56) ligt, dat dus binnen zoo'n gedeelte

$\frac{t_1}{t_2}$ eenmaal de waarde $-\frac{a_1 v_2}{a_2 v_1}$ aanneemt.

Om de gedachten te bepalen, zullen wij $s_1 < s_2$ stellen. (Voor het geval, dat $s_1 > s_2$, zal de redeneering die volgt, blijven gelden, wanneer slechts s_1 en s_2 verwisseld worden). Wij kiezen nu een negatief interval s_1 en vestigen de aandacht op het gedeelte van de lijn L , dat behoort tot dit negatieve interval s_1 en tegelijkertijd tot een positief interval s_2 . Het linkereindpunt van een interval noemen wij het begin.

In de eerste plaats kan het negatieve interval s_1 geheel binnen het positieve s_2 vallen; dan valt het begin van het te beschouwen stukje lijn samen met het begin van s_1 en zal evenzoo het einde samenvallen met het einde van s_1 , zoodat in het beginpunt

$t_1 = -\infty$, t_2 eindig en positief, dus $\frac{t_1}{t_2} = -\infty$, aan het einde

$t_1 = 0$ en t_2 positief, dus $\frac{t_1}{t_2} = 0$ zal zijn. Ten tweede kan s_1

links van s_2 beginnen, dan zal het te beschouwen interval beginnen met $t_2 = 0$, t_1 eindig en negatief, en eindigen met $t_1 = 0$

en t_2 eindig en positief, zoodat $\frac{t_1}{t_2}$ in het beginpunt $-\infty$, aan

het einde 0 is. Ten derde kan het einde van s_1 buiten s_2 vallen, dan zal in het beginpunt van genoemd interval $t_1 = -\infty$,

t_2 eindig en positief en dus $\frac{t_1}{t_2} = -\infty$, in het eindpunt $t_2 = \infty$,

t_1 eindig en negatief en dus $\frac{t_1}{t_2} = 0$ zijn.

In alle gevallen doorloopt dus $\frac{t_1}{t_2}$ in het beschouwde interval alle waarden van $-\infty$ tot 0 en zal dus de waarde $-\frac{a_1 v_2}{a_2 v_1}$ moeten passeeren en wel slechts éénmaal, omdat in het beschouwde

interval s_1 in absolute waarde afneemt en s_2 in absolute waarde toeneemt. Op gelijke wijze kan men aantonen, dat in ieder deel van L , dat tot een positief interval s_1 en een negatief interval s_2 behoort, één wortel van (56) ligt.

Wij zullen echter eerst op de negatieve intervallen s_1 letten en berekenen hoeveel deelen van de lijn L behooren tot een negatief interval s_1 en een positief interval s_2 .

Dit aantal mogen wij gelijk stellen aan het produkt van het aantal negatieve intervallen s_1 en de waarschijnlijkheid, dat een bepaald negatief interval s_1 voor een gedeelte of geheel samenvalt met een willekeurig positief interval s_2 .

Denken wij ons de lijn L weer verdeeld in gelijke deelen s_2 , afwisselend positief en negatief en het beginpunt van het interval s_1 willekeurig op de lijn L geplaatst, dan zal op ieder deel $2 s_2$ een gedeelte $s_1 + s_2$ gunstig voor eene ligging van het punt genoemd kunnen worden, waarbij het samenvallen plaats heeft, en is dus de gezochte waarschijnlijkheid

$$\frac{s_1 + s_2}{2 s_2}.$$

Daar er $\frac{L}{2s_1}$ negatieve intervallen zijn, is dus het gezochte aantal wortels van verg. (56), welke in de negatieve intervallen s_1 liggen,

$$\frac{s_1 + s_2}{4 s_1 s_2} L.$$

Er liggen evenveel wortels in de positieve intervallen s_1 en dus zijn er in het geheel $\frac{s_1 + s_2}{2 s_1 s_2} L$ wortels. Wij vinden dus voor het gezochte aantal bewegingstoestanden

$$\frac{s_1 + s_2}{2s_1s_2} dn df dg,$$

hetgeen wij, omdat wij alleen de stralen, die bij de breking in het invalsvlak gepolariseerd zijn, beschouwd hebben, moeten verdubbelen. Aan elk dezer toestanden mogen wij volgens het principe van JEANS een hoeveelheid energie $\frac{2}{3} \alpha T$ toekennen, zoodat voor de energie, die in het parallelepipedum aanwezig is, gevonden wordt

$$\frac{2}{3} \alpha T \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} d n d f d g. \quad (57)$$

Hiervan is nu echter slechts een gedeelte, voor ieder gegeven toestand bepaald door verg. (52), in het eerste medium te vinden. De waarde der breuk σ is voor de verschillende wortels niet gelijk, zoodat wij, om de totale energie in het eerste medium te kunnen berekenen, de gemiddelde waarde van σ ($\bar{\sigma}$) voor de verschillende wortels moeten bepalen.

Stellen wij weer

$$\operatorname{tg} \frac{n a_1 p_1}{v_1} = t_1, \quad \operatorname{tg} \frac{n a_2 p_2}{v_2} = t_2,$$

dan is volgens verg. (47)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} n (u_1 - u_1') = - t_1$$

dus

$$\cos^2 \frac{1}{2} n (u_1 - u_1') = \frac{1}{1 + t_1^2}$$

en evenzoo volgens verg. (48)

$$\cos^2 \frac{1}{2} n (u_2 - u_2') = \frac{1}{1 + t_2^2};$$

zoodat uit verg. (45) volgt

$$b^2 = \frac{a_1^2}{a_2^2} \frac{1 + t_2^2}{1 + t_1^2} a^2.$$

Substitueeren wij dit in verg. (52), dan vinden wij

$$\sigma = \frac{a_2^2 p_1 (1 + t_1^2)}{a_2^2 p_1 (1 + t_1^2) + a_1^2 p_2 (1 + t_2^2)}. \quad (58)$$

Daar t_2 van t_1 afhangt volgens de betrekking

$$t_2 = - \frac{a_2 v_1}{a_1 v_2} t_1, \quad (59)$$

is σ geheel bepaald, wanneer t_1 voor de gekozen bewegings-toestand bekend is. Om de waarde van t_1 te vinden, is slechts noodig den afstand te kennen, waarop de wortel van verg. (56), waaraan de bewegingstoestand beantwoordt, van het beginpunt van een der intervallen langs de vroeger beschouwde lijn L verwijderd is.

Beschouwen wij eerst alleen die wortels, die in de negatieve intervallen s_1 liggen en zij y de afstand, waarop een wortel van het beginpunt van zijn interval s_1 verwijderd is, dan is

$$t_1 = \operatorname{tg} h_1 (y - s_1) = - \cot h_1 y. \quad (60)$$

De ligging van den wortel wordt verder bepaald door den relatieven stand van het beschouwde interval s_1 en het positieve interval s_2 , waarmee s_1 voor een deel samenvalt. Zij x de afstand van het linkereind van het interval s_1 tot het rechteind van het interval s_2 , dan zal x alle waarden kunnen hebben, die liggen tusschen 0 en $s_1 + s_2$. De door y bepaalde plaats van den wortel ligt op een afstand $y - x + s_2$ van het linkereinde van het interval s_2 . Dus is aldaar

$$t_2 = \operatorname{tg} h_2 (y - x + s_2) = - \cot h_2 (y - x). \quad (61)$$

Uit (59) volgt nu

$$- \alpha_1 v_2 \cot h_2 (y - x) = \alpha_2 v_1 \cot h_1 y, \quad (62)$$

welke vergelijking y als functie van x doet kennen, terwijl verg. (58), (59) en (60) ook σ als functie van x bepalen, zoodat de middelwaarde $\bar{\sigma}$ berekend kan worden. Daar alle waarden van x tusschen 0 en $s_1 + s_2$ gelijkelijk zullen voorkomen, is

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{s_1 + s_2} \int_0^{s_1 + s_2} \sigma \, dx. \quad (63)$$

Ter berekening van de integraal voeren wij t_1 als onafhankelijk veranderlijke in. Uit (62) volgt nu

$$dx = \left(1 + \frac{\alpha_2 v_1 h_1 \sin^2 h_2 (y - x)}{\alpha_1 v_2 h_2 \sin^2 h_1 y} \right) dy.$$

Bedenken wij verder, dat $h_1 = \frac{p_1}{\alpha_1 v_1}$, $h_2 = \frac{p_2}{\alpha_2 v_2}$, dat uit verg. (60) volgt

$$\sin^2 h_1 y = \frac{1}{1 + t_1^2} \quad \text{en} \quad dy = \frac{1}{h_1(1 + t_1^2)} dt_1,$$

dat uit verg. (61) volgt

$$\sin^2 h_2 (y - x) = \frac{1}{1 + t_2^2},$$

dat voor $x = 0$, $y = 0$ en dus $t_1 = -\infty$, terwijl voor $x = s_1 + s_2$, $y = s_1$ en dus $t_1 = 0$ is, dan vinden wij voor verg. (63)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{s_1 + s_2} \int_{-\infty}^0 \frac{\alpha_2^2 p_1}{\alpha_1^2 p_2} \frac{1}{h_1} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2^2 v_1^2}{\alpha_1^2 v_2^2} t_1^2} dt_1 \\ &= \frac{1}{s_1 + s_2} \frac{\alpha_2 v_2}{p_2} \frac{\pi}{2} = \frac{s_2}{s_1 + s_2}. \end{aligned}$$

Dezelfde uitkomst zullen wij verkrijgen, wanneer wij in plaats van de wortels in de negatieve intervallen s_1 die, welke in de positieve intervallen s_1 liggen, beschouwen.

De fractie $\frac{s_2}{s_1 + s_2}$ van de energie, aangegeven in verg. (57), is dus in het eerste medium te vinden en dus is daar aanwezig een hoeveelheid energie

$$\frac{2}{3} \alpha T \frac{1}{s_1} dn df dg = \frac{4}{3} \alpha T \frac{p_1}{\pi v_1 \alpha_1} dn df dg. \quad (64)$$

Het is nu nog de vraag, waardoor wij $df dg$ moeten vervangen, ten einde alle stralen in rekening te brengen, waarvan de invalshoek met het scheidingsvlak der beide media kleiner is dan de grenshoek. Noemen wij den hoek, dien de straal maakt met de normaal op het grensvlak ϑ_1 , dan volgt uit de vergelijkingen (38)

$$\frac{n^2}{\pi^2 v_1^2} q^2 r^2 \sin^2 \vartheta_1 = (rf)^2 + (qg)^2$$

of, als wij $\frac{n q r}{\pi v_1} \sin \vartheta_1 = \varrho$, $rf = f_1$, $qg = g_1$ stellen,

$$\varrho^2 = f_1^2 + g_1^2.$$

Het aantal stralen, waarvan de invalshoek ligt tusschen ϑ_1 en $\vartheta_1 + d\vartheta_1$, kan dus worden voorgesteld door het aantal punten in het platte vlak, waarvan de coördinaten positieve veelvouden van r en q zijn en die tusschen twee cirkels met stralen ϱ en

$\varrho + d\varrho$ liggen, waarbij $d\varrho = \frac{n q r}{\pi v_1} \cos \vartheta_1 d\vartheta_1$.

Dit aantal is

$$\frac{1}{2} \frac{\pi \varrho}{q r} \frac{d \varrho}{r} = \frac{n^2 q r}{2 \pi v_1^2} \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 d\vartheta_1.$$

Stellen wij deze uitdrukking in verg. (64) voor $df dg$ in de plaats en integreeren wij over alle waarden van ϑ_1 van 0 tot ψ , dan vinden wij voor de energie in het eerste medium tengevolge van stralen, die aan het scheidingsvlak gebroken worden,

$$\frac{2}{3} \alpha T p_1 q r \frac{n^2}{\pi^2 v_1^3} \frac{dn}{v_1^3} \int_0^\psi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 =$$

$$\frac{2}{3} \alpha T p_1 q r \frac{n^2}{\pi^2 v_1^3} (1 - \cos \psi). \quad (65)$$

Deze hoeveelheid, gevoegd bij de energie, die volgens verg. (34) tengevolge van de totaal gereflecteerde stralen in het eerste medium aanwezig is, geeft voor de dichtheid der energie de verwachte uitkomst

$$\frac{2}{3} \alpha T \frac{n^2}{\pi^2 v_1^3} \frac{dn}{v_1^3}.$$

Wij vinden volgens deze beschouwing de energie in het tweede medium, wanneer wij $\bar{\sigma}$ vervangen door $1 - \bar{\sigma} = \frac{s_1}{s_1 + s_2}$ en verder op dezelfde wijze te werk gaan als bij de afleiding van formule (65).

In plaats van de uitdrukking (64) vinden wij dan

$$\frac{2}{3} \alpha T \frac{1}{s_2} dn df dg = \frac{4}{3} \alpha T \frac{p_2}{\pi a_2 v_2} dn df dg,$$

zoodat wij de uitdrukking

$$\frac{4}{3} \alpha T \frac{p_2}{\pi a_2 v_2} dn \frac{n^2 q r}{2 \pi v_1^2} \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 d\vartheta_1$$

naar ϑ_1 moeten integreeren tusschen de grenzen 0 en ψ .

Is nu ϑ_2 de hoek, dien de voortplantingsrichting in het tweede medium met de normaal op het grensvlak maakt, dan is

$$\alpha_2 = \cos \vartheta_2, \quad \frac{\sin \vartheta_1}{v_1} = \frac{\sin \vartheta_2}{v_2},$$

zoodat wij ten slotte verkrijgen

$$\frac{2}{3} \alpha T p_2 q r \frac{n^2}{\pi^2 v_2^3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 = \frac{2}{3} \alpha T p_2 q r \frac{n^2}{\pi^2 v_2^3}$$

en wij voor de energiedichtheid vinden

$$\frac{2}{3} \alpha T \frac{n^2}{\pi^2 v_2^3}.$$

HOOFDSTUK II.

Over den stralingstoestand binnen een bol met volkomen spiegelende wanden.

§ 1.

Evenals in het vorige hoofdstuk zal de stralingstoestand bekend zijn, wanneer alle mogelijke oplossingen voor \mathbf{d} en \mathbf{h} gevonden zijn, welke voldoen aan de Maxwellsche grondvergelijkingen en aan de voorwaarden van de volkomen geleidende begrenzing. Uit de grondvergelijkingen van het electromagnetisch veld in den aether volgt, dat iedere ontbondene van \mathbf{d} en \mathbf{h} , volgens drie onderling loodrechte assen, moet voldoen aan de vergelijking

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (66)$$

Wij mogen aannemen, dat \mathbf{d} en \mathbf{h} periodieke functie's van den tijd zijn, zoodat iedere ontbondene van den vorm $u e^{ipt}$ is, waarbij wij de letter n , die vroeger voor de frequentie gebruikt is, door de letter p vervangen. Uit verg. (66) volgt dan

$$\Delta u + \frac{p^2}{c^2} u = 0. \quad (67)$$

Het ligt voor de hand deze vergelijking te transformeeren in poolcoördinaten, zoodat zij overgaat in

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{p^2}{c^2} u = 0, \quad (68)$$

waarbij ϑ de hoek is tusschen r en de polaire as.

Om oplossingen van deze vergelijking te vinden, stellen wij $u = f(r) \chi(\vartheta, \varphi)$, waardoor verg. (68) overgaat in

$$\frac{1}{r} \chi(\vartheta, \varphi) \frac{\partial^2 [r f(r)]}{\partial r^2} + \frac{f(r)}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \frac{\partial \chi(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right\} + \frac{f(r)}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \chi(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{p^2}{c^2} \chi(\vartheta, \varphi) f(r) = 0.$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan, wanneer $\chi(\vartheta, \varphi)$ voldoet aan

$$n(n+1) \chi(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \frac{\partial \chi(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right\} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \chi(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (69)$$

en $f(r)$ aan

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df(r)}{dr} + \left\{ \frac{p^2}{c^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right\} f(r) = 0. \quad (70)$$

Verg. (69) is de differentiaalvergelijking van de algemeene bolfunctie's van de n^e orde Y_n , terwijl verg. (70) te herleiden is tot de differentiaalvergelijking der Besselsche functie's door te stellen

$$\frac{p}{c} r = \varrho$$

$$f(r) = \frac{\mathcal{J}(\varrho)}{\sqrt{\varrho}}.$$

Daardoor gaat zij n.l. over in

$$\frac{d^2 \mathcal{J}}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\mathcal{J}}{d\varrho} + \left\{ 1 - \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{\varrho^2} \right\} \mathcal{J} = 0. \quad (71)$$

Een oplossing van de oorspronkelijke vergelijking is dus

$$u = \frac{\mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}(\varrho) Y_n}{\sqrt{\varrho}}. \quad (72)$$

Om nu mogelijke bewegingstoestanden binnen den bol te vinden, kunnen wij J. J. THOMSON *) volgen en letten op de verdeling van lading, welke tengevolge van de electromagnetische trillingen op het oppervlak ontstaat. De dichtheid hiervan

*) Resent Researches in Electricity and Magnetism, § 308 en volgende, pag. 361. (Electrical Oscillations on a Spherical Conductor).

is evenals iedere functie op het boloppervlak voor te stellen door algemeene bolfunctie's, terwijl een algemeene bolfunctie van de n^e orde te ontwikkelen is in $2n + 1$ zonale bolfunctie's. De toestand op den bol is dus voor te stellen door de superpositie van $\Sigma (2n + 1)$ toestanden, waarbij n alle waarden doorloopt van 1 tot ∞ en waarbij de dichtheid der lading telkens door een zonale bolfunctie wordt voorgesteld.

Daar wij alleen het aantal mogelijke bewegingswijzen zoeken, zal het voldoende zijn een dezer elementaire toestanden na te gaan, bijv. die, waarbij de dichtheid der lading voorgesteld kan worden door de zonale bolfunctie Q_n . Is voor deze het aantal bewegingswijzen bepaald, dan zal door integratie het aantal, dat

aan de superpositie der $\sum_{n=1}^{n=\infty} (2n + 1)$ toestanden beantwoordt,

gevonden kunnen worden.

Wordt nu die bewegingstoestand in het oog gevat, waarbij de dichtheid der lading door de zonale bolfunctie Q_n wordt aangegeven, dan ligt het voor de hand een der coördinaatassen, bijv. de Z -as, met de symmetrie-as der zonale belegging te doen samenvallen.

De lading is nu symmetrisch t.o.z. van de Z -as en de elektrische krachtlijnen liggen in meridiaanvlakken. Hieruit volgt, dat de lijnintegraal van de elektrische kracht om een vlakje, dat loodrecht op de Z -as staat, nul is, zoodat de ontbondene der magnetische kracht in de richting der Z -as nul is. Evenzoo is de lijnintegraal van de elektrische kracht om een vlakje, dat loodrecht op den straal staat, nul en is er dus ook geen ontbondene der magnetische kracht volgens den straal.

De magnetische krachtlijnen zijn dus cirkels in vlakken loodrecht op de Z -as. Voor de ontbondenen van \mathbf{h} vinden wij dus

$$\mathbf{h}_z = 0$$

$$\mathbf{h}_x : \mathbf{h}_y = \sin \varphi : - \cos \varphi.$$

Bedenken wij, dat de oplossingen van \mathbf{h}_x , \mathbf{h}_y en \mathbf{h}_z begrepen moeten zijn in de algemeene oplossing (72), waarin wij Y_n kunnen

voorstellen door

$$\left(A_{ni} \cos i\varphi + B_{ni} \sin i\varphi \right) \sin i\vartheta \frac{d^i Q_n}{d(\cos \vartheta)^i},$$

als men i de waarde 1, 2 . . . n geeft, dan vinden wij de volgende oplossing:

$$h_x = A \cos \varphi \sin \vartheta \frac{d Q_n}{d \cos \vartheta} f(r) e^{ipt}$$

$$h_y = - A \sin \varphi \sin \vartheta \frac{d Q_n}{d \cos \vartheta} f(r) e^{ipt}$$

$$h_z = 0.$$

Hierbij is $f(r) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)}{\sqrt{\rho}}$, de functie, die voldoet aan verg. (70).

De vergelijkingen voor de ontbondenen van \mathbf{d} , die hierbij behooren, zijn gemakkelijk te vinden. Voeren wij de waarden

$$\cos \varphi \sin \vartheta = \frac{y}{r}, \quad \sin \varphi \sin \vartheta = \frac{x}{r} \quad \text{in,}$$

en stellen wij

$$\cos \vartheta = \mu,$$

dan vinden wij met weglating van den factor A , (dien wij ook onder $f(r)$ kunnen begrijpen), den volgenden bewegingstoestand:

$$h_x = \frac{y}{r} \frac{dQ_n}{d\mu} f(r) e^{ipt}$$

$$h_y = - \frac{x}{r} \frac{dQ_n}{d\mu} f(r) e^{ipt} \quad (73)$$

$$h_z = 0$$

$$d_x = -i \frac{c}{p} \left\{ \frac{xz}{r} \frac{dQ_n}{d\mu} \left[\frac{1}{r^2} f(r) + \frac{1}{r} f'(r) \right] - \frac{x}{r^2} n(n+1) f(r) Q_n \right\} e^{ipt}$$

$$d_y = -i \frac{c}{p} \left\{ \frac{yz}{r} \frac{dQ_n}{d\mu} \left[\frac{1}{r^2} f(r) + \frac{1}{r} f'(r) \right] - \frac{y}{r^2} n(n+1) f(r) Q_n \right\} e^{ipt} \quad (74)$$

$$d_z = -i \frac{c}{p} \left\{ - \frac{x^2 + y^2}{r} \frac{dQ_n}{d\mu} \left[\frac{1}{r^2} f(r) + \frac{1}{r} f'(r) \right] - \frac{z}{r^2} n(n+1) f(r) Q_n \right\} e^{ipt}.$$

Wij merken hierbij op, dat volgens deze vergelijkingen

$$d_r = i \frac{c}{p} \frac{1}{r} n(n+1) f(r) Q_n e^{ipt}$$

is, waaruit men gemakkelijk afleidt, dat inderdaad de dichtheid aan het boloppervlak evenredig met Q_n is.

Naast deze oplossing kan een tweede gevonden worden door verwisseling van \mathbf{d} en \mathbf{h} met omkeering van het teeken van een van beiden. Dit volgt hieruit, dat in de vergelijkingen van MAXWELL \mathbf{d} en \mathbf{h} op dezelfde wijze, alleen in teeken verschillend, voorkomen.

Deze tweede bewegingstoestand kenmerkt zich door het feit, dat de electricische krachtlijnen cirkels zijn om de Z -as, zoodat de electricische kracht aan het oppervlak van den bol overal tangentieel gericht is. Het is dus niet te verwonderen, dat bij de voorgaande beschouwing, die van de lading op het oppervlak uitging, deze oplossing niet gevonden is.

Met het oog op de grensvoorwaarden aan het oppervlak van den bol, die de mogelijke frequentie's bepalen en met het oog op de samenstelling der gevonden elementaire bewegingswijzen, is het wenschelijk over te gaan tot poolcoördinaten en de vectoren \mathbf{d} en \mathbf{h} te ontbinden volgens drie onderling loodrechte richtingen, waarvan de één samenvalt met den voerstraal, de tweede in het meridiaanvlak loodrecht op den voerstraal staat en de derde loodrecht op het meridiaanvlak staat. Noemen wij deze ontbondenen \mathbf{d}_r , \mathbf{d}_θ , \mathbf{d}_φ , \mathbf{h}_r , \mathbf{h}_θ , \mathbf{h}_φ , dan gelden voor het eerste type van oplossingen de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_r &= i \frac{c}{p} n(n+1) \frac{f(r)}{r} Q_n e^{ipt} \\ \mathbf{d}_\theta &= -i \frac{c}{p} \frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{d r} [r f(r)] \frac{d Q_n}{d \mu} e^{ipt} \end{aligned} \quad (75)$$

$$\mathbf{d}_\varphi = 0.$$

$$\mathbf{h}_r = 0$$

$$\mathbf{h}_\theta = 0 \quad (76)$$

$$\mathbf{h}_\varphi = \sin \theta f(r) \frac{d Q_n}{d \mu} e^{ipt}.$$

De grensvoorwaarde is $d_\theta = 0$, zoodat voldaan moet worden aan de vergelijking

$$\frac{d [r f(r)]}{dr} = 0 \text{ voor } r = R, \quad (77)$$

als R de straal van den bol is.

Voor het tweede type van oplossingen gelden de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_r &= 0 \\ \mathbf{d}_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (78)$$

$$\mathbf{d}_\varphi = - \sin \vartheta f(r) \frac{d Q_n}{d \mu} e^{ipt}.$$

$$\mathbf{h}_r = i \frac{c}{p} n(n+1) \frac{f(r)}{r} Q_n e^{ipt}$$

$$\mathbf{h}_\theta = - i \frac{c}{p} \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{d [r f(r)]}{dr} \frac{d Q_n}{d \mu} e^{ipt} \quad (79)$$

$$\mathbf{h}_\varphi = 0.$$

Voor de grensvoorwaarde kunnen wij hier nemen $\mathbf{d}_\varphi = 0$ of $\mathbf{h}_r = 0$, welke beide voeren tot

$$f(r) = 0 \text{ voor } r = R. \quad (80)$$

Bij het verder werken met deze elementaire bewegingstoestanden stuiten wij op het bezwaar, dat ieder is neergeschreven voor een bijzonder assenstelsel, zoodanig dat de Z -as samenvalt met de symmetrie-as der zonale bolfunctie, die in de vergelijkingen voorkomt. Dit bezwaar wordt opgeheven, wanneer de oplossingen in vectorvergelijkingen geschreven worden.

Bij de oplossingen van het eerste type (verg. (75) en (76)) is \mathbf{d} gesplitst in twee componenten, waarvan één in de richting van den voerstraal en een tweede loodrecht op den voerstraal in het meridiaanvlak. De eerste zullen wij \mathbf{d}_1 , de tweede \mathbf{d}_2 noemen. Evenzoo is bij het tweede type (verg. (78) en (79)) de vector \mathbf{h} gesplitst in \mathbf{h}_1 en \mathbf{h}_2 .

Beschouwen wij Q_n als een functie van x , y en z , dan valt de richting van \mathbf{d}_2 samen met die van $\text{grad } Q_n$. Noemen wij verder den eenheidsvector in de richting van den voerstraal \mathbf{k} en bedenken wij, dat

$$\text{grad } Q_n = \frac{1}{r} \frac{d Q_n}{d \vartheta},$$

dan vinden wij de volgende vectorvergelijkingen :

TYPE I.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= i \frac{c}{p} n (n + 1) \frac{f(r)}{r} Q_n \mathbf{k} e^{ipt} \\ \mathbf{d}_2 &= i \frac{c}{p} \frac{d [r f(r)]}{dr} \mathbf{grad} Q_n e^{ipt} \\ \mathbf{h} &= r f(r) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{grad} Q_n] e^{ipt}, \end{aligned} \quad (81)$$

terwijl p voldoet aan

$$\frac{d [r f(r)]}{dr} = 0 \text{ voor } r = R.$$

TYPE II.

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= - r f(r) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{grad} Q_n] e^{ipt} \\ \mathbf{h}_1 &= i \frac{c}{p} n (n + 1) \frac{f(r)}{r} Q_n \mathbf{k} e^{ipt} \\ \mathbf{h}_2 &= i \frac{c}{p} \frac{d [r f(r)]}{dr} \mathbf{grad} Q_n e^{ipt}, \end{aligned} \quad (82)$$

terwijl p voldoet aan

$$f(r) = 0 \text{ voor } r = R.$$

De oplossingen (81) en (82) zijn nu zeer geschikt voor den overgang tot meer algemeene oplossingen, die men verkrijgt, wanneer men de zonale bolfunctie Q_n door een willekeurige bolfunctie Y_n van dezelfde orde vervangt. Dat dit geoorloofd is, blijkt hieruit, dat men deze laatste steeds als een som van zonale bolfunctie's, elk met een constanten factor vermenigvuldigd, kan voorstellen en dat, als

$$Y_n = \Sigma (c_n Q_n)$$

is, ook de betrekkingen

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} Y_n &= \Sigma (c_n \mathbf{grad} Q_n) \\ [\mathbf{k} \cdot \mathbf{grad} Y_n] &= \Sigma (c_n [\mathbf{k} \cdot \mathbf{grad} Q_n]) \end{aligned}$$

bestaan.

Wij komen dus tot de volgende twee stelsels vergelijkingen:

TYPE I.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= i \frac{c}{p} n (n+1) \frac{f(r)}{r} Y_n \mathbf{k} e^{ipt} \\ \mathbf{d}_2 &= i \frac{c}{p} \frac{d [r f(r)]}{dr} \mathbf{grad} Y_n e^{ipt} \\ \mathbf{h} &= r f(r) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{grad} Y_n] e^{ipt} \\ \frac{d [r f(r)]}{dr} &= 0 \text{ voor } r = R. \end{aligned} \quad (83)$$

TYPE II.

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= -r f(r) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{grad} Y_n] e^{ipt} \\ \mathbf{h}_1 &= i \frac{c}{p} n (n+1) \frac{f(r)}{r} Y_n \mathbf{k} e^{ipt} \\ \mathbf{h}_2 &= i \frac{c}{p} \frac{d [r f(r)]}{dr} \mathbf{grad} Y_n e^{ipt} \\ f(r) &= 0 \text{ voor } r = R. \end{aligned} \quad (84)$$

Vermenigvuldigen wij bovenstaande uitdrukkingen met $-a e^{i\delta}$ en nemen wij het reële gedeelte, dan vinden wij de volgende uitdrukkingen voor de bewegingstoestanden:

TYPE I.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= \frac{c}{p} a n (n+1) \frac{f(r)}{r} Y_n \mathbf{k} \sin (pt + \delta) \\ \mathbf{d}_2 &= \frac{c}{p} a \frac{d [r f(r)]}{dr} \mathbf{grad} Y_n \sin (pt + \delta) \\ \mathbf{h} &= -ar f(r) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{grad} Y_n] \cos (pt + \delta). \end{aligned} \quad (85)$$

TYPE II.

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= ar f(r) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{grad} Y_n] \cos (pt + \delta) \\ \mathbf{h}_1 &= \frac{c}{p} a n (n+1) \frac{f(r)}{r} Y_n \mathbf{k} \sin (pt + \delta) \\ \mathbf{h}_2 &= \frac{c}{p} a \frac{d (r f(r))}{dr} \mathbf{grad} Y_n \sin (pt + \delta). \end{aligned} \quad (86)$$

Om nu met behulp van het principe van JEANS de energie te kunnen berekenen, moeten wij in de eerste plaats aantonen, dat wanneer aan n alle mogelijke waarden gegeven worden, verg. (83) en (84) alle bewegingstoestanden binnen den bol doen kennen. Wij zullen als voldoende bewezen aannemen, dat bij elken elemen-

tairen bewegingstoestand \mathbf{d} en \mathbf{h} enkelvoudige periodieke functie's van den tijd zijn en dat iedere functie van ϑ en φ in bolfunctie's ontwikkeld kan worden. Ten einde het bewijs te leveren, verdient het aanbeveling de grondvergelijkingen van het electromagnetisch veld in poolcoördinaten te transformeeren.

Zij gaan daardoor over in

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} r^2 \sin \vartheta \dot{\mathbf{d}}_r &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta \mathbf{h}_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \mathbf{h}_\vartheta) \\ \frac{1}{c} r \sin \vartheta \dot{\mathbf{d}}_\vartheta &= \frac{\partial \mathbf{h}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta \mathbf{h}_\varphi) \quad (87) \\ \frac{1}{c} r \dot{\mathbf{d}}_\varphi &= \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{h}_\vartheta) - \frac{\partial \mathbf{h}_r}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} r^2 \sin \vartheta \dot{\mathbf{h}}_r &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta \mathbf{d}_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \mathbf{d}_\vartheta) \\ -\frac{1}{c} r \sin \vartheta \dot{\mathbf{h}}_\vartheta &= \frac{\partial \mathbf{d}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta \mathbf{d}_\varphi) \quad (88) \\ -\frac{1}{c} r \dot{\mathbf{h}}_\varphi &= \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{d}_\vartheta) - \frac{\partial \mathbf{d}_r}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \vartheta \mathbf{d}_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta \mathbf{d}_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \mathbf{d}_\varphi) = 0 \quad (89)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \vartheta \mathbf{h}_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta \mathbf{h}_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \mathbf{h}_\varphi) = 0. \quad (90)$$

Uit deze vergelijkingen kunnen voor \mathbf{d}_r en \mathbf{h}_r de volgende differentiaalvergelijkingen worden afgeleid:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} r^2 \sin \vartheta \ddot{\mathbf{d}}_r &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \sin \vartheta \mathbf{d}_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \mathbf{d}_r}{\partial \vartheta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \mathbf{d}_r}{\partial \varphi^2} \cdot \\ \frac{1}{c^2} r^2 \sin \vartheta \ddot{\mathbf{h}}_r &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \sin \vartheta \mathbf{h}_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \mathbf{h}_r}{\partial \vartheta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \mathbf{h}_r}{\partial \varphi^2} \cdot \end{aligned}$$

Bevatten \mathbf{d}_r en \mathbf{h}_r den tijd in den factor e^{ipt} dan gaan bovenstaande vergelijkingen over in

$$-\frac{p^2}{c^2} r^2 \sin \vartheta \mathbf{d}_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \sin \vartheta \mathbf{d}_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \mathbf{d}_r}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \mathbf{d}_r}{\partial \varphi^2} \quad (91)$$

en

$$-\frac{p^2}{c^2} r^2 \sin \vartheta \mathbf{h}_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \sin \vartheta \mathbf{h}_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \mathbf{h}_r}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \mathbf{h}_r}{\partial \varphi^2}. \quad (92)$$

Wij zullen verder gebruik hebben te maken van de stelling, dat er geen enkelvoudige periodieke functie bestaan kan bij welke overal $\mathbf{d}_r = 0$, $\mathbf{h}_r = 0$ is.

Wij kunnen n.l. bewijzen, dat dan ook de andere componenten van \mathbf{d} en \mathbf{h} moeten verdwijnen. Ten dien einde merken wij op, dat voor $\mathbf{d}_r = 0$, $\mathbf{h}_r = 0$ de verg. (87) en (88) zich reduceeren tot

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\mathbf{h}_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial \mathbf{h}_\vartheta}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{1}{c} r \dot{\mathbf{d}}_\vartheta = - \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{h}_\varphi) \quad (93) (a)$$

$$\frac{1}{c} r \dot{\mathbf{d}}_\varphi = \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{h}_\vartheta). \quad (b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\mathbf{d}_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial \mathbf{d}_\vartheta}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{1}{c} r \dot{\mathbf{h}}_\vartheta = \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{d}_\varphi) \quad (94) (a')$$

$$- \frac{1}{c} r \dot{\mathbf{h}}_\varphi = \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{d}_\vartheta). \quad (b')$$

Differentiëeren wij verg. (a) naar r , verg. (b') naar t , dan vinden wij

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{\mathbf{d}}_\vartheta) = - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \mathbf{h}_\varphi)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{\mathbf{d}}_\varphi) = - \frac{1}{c^2} (r \ddot{\mathbf{h}}_\varphi),$$

dus

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \mathbf{h}_\varphi) = - p^2 r \mathbf{h}_\varphi,$$

als wij aannemen, dat \mathbf{h}_φ , evenals alle componenten van \mathbf{h} en \mathbf{d} , den factor e^{ipt} bevat. Hieruit volgt

$$r \mathbf{h}_\varphi = a e^{ip} \left(t + \frac{r}{c} \right) + a' e^{ip} \left(t - \frac{r}{c} \right),$$

waarin a en a' van ϑ en φ kunnen afhangen maar niet van t en r ; deze grootheden kunnen complexe waarden hebben.

Verder vindt men dan uit de verg. (a)

$$r \mathbf{d}_\vartheta = - a e^{ip} \left(t + \frac{r}{c} \right) + a' e^{ip} \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

Neemt men van de gevonden waarden de reële gedeelten, dan verkrijgt men uitdrukkingen van den vorm

$$r \mathbf{h}_\varphi = \beta \cos p \left(t + \frac{r}{c} + \gamma \right) + \beta' \cos p \left(t - \frac{r}{c} + \gamma' \right)$$

$$r \mathbf{d}_\vartheta = -\beta \cos p \left(t + \frac{r}{c} + \gamma \right) + \beta' \cos p \left(t - \frac{r}{c} + \gamma' \right).$$

Daar nu in het middelpunt van den bol \mathbf{h}_φ en \mathbf{d}_ϑ eindig zijn, moeten daar $r \mathbf{h}_\varphi$ en $r \mathbf{d}_\vartheta$ verdwijnen en dit vereischt

$$\beta = 0, \beta' = 0;$$

men ziet dit in, als men opmerkt, dat ook de som en het verschil van $r \mathbf{h}_\varphi$ en $r \mathbf{d}_\vartheta$ 0 moet worden. Derhalve is overal

$$\mathbf{h}_\varphi = 0, \mathbf{d}_\vartheta = 0.$$

Hetzelfde kan men, gebruik makende van de vergelijkingen (b) en (a') van \mathbf{h}_ϑ en \mathbf{d}_φ bewijzen. Daarmede is aangetoond, dat als \mathbf{d}_r en \mathbf{h}_r 0 zijn, hetzelfde voor de andere componenten geldt.

Wij kunnen thans overgaan tot het bewijs, dat alle mogelijke enkelvoudige bewegingstoestanden in de formules begrepen zijn.

Vooreerst kunnen wij, volgens een der gemaakte onderstellingen een willekeurig gegeven toestand A ontbinden in toestanden die elk op zich zelf enkelvoudig periodiek zijn. Zij B één daarvan met de frequentie p ; dan bevatten alle toestandsgrootheden, die op B betrekking hebben, den factor e^{ipt} .

Het zal nu mogelijk blijken een complex C_1 van toestanden van het eerste type te vinden, zoodanig dat in dat complex overal $\mathbf{h}_r = 0$, terwijl \mathbf{d}_r de waarde heeft die in B voorkomt; en evenzoo een complex C_2 van toestanden van het tweede type, zoodanig dat hierin $\mathbf{d}_r = 0$, maar \mathbf{h}_r de bij B behoorende waarde heeft.

De complexen C_1 en C_2 , gelijktijdig bestaande, moeten nu volgens de boven bewezen stelling juist den toestand B opleveren. Immers zij geven zoowel voor \mathbf{d}_r als voor \mathbf{h}_r de in B bestaande waarden. Bestond er dan tusschen de toestanden B en $C_1 + C_2$ een verschil, dan zou in dezen „verschiltoestand” $\mathbf{d}_r = 0$, $\mathbf{h}_r = 0$ zijn, waaruit volgt $\mathbf{d} = 0$, $\mathbf{h} = 0$.

Om het complex C_1 te vinden, vatten wij de waarden van \mathbf{d}_r in het oog, die bij den toestand B bestaan en wel de waarden, die op een bol met willekeurig gekozen straal voorkomen. Deze waarden kunnen wij in een reeks van bolfunctie's van verschillende orden ontbinden, zoodat wij schrijven

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_r &= F_0 Y_0 + F_1 Y_1 + \dots + F_n Y_n + \dots \\ &= \mathbf{d}_r^{(0)} + \mathbf{d}_r^{(1)} + \dots + \mathbf{d}_r^{(n)} + \dots \end{aligned} \quad (95)$$

Wij zullen nu aantoonen, dat, welke waarde men ook aan den straal r toekent, hierbij steeds *dezelfde* bolfunctie's verkregen worden, zoodat in bovenstaande reeks de afstand r alleen in de coëfficiënten $F_0, F_1, \dots, F_n, \dots$ voorkomt.

Zij OL een bepaalde van O uit getrokken lijn, P het punt, waar zij den bol, met O tot middelpunt en straal r snijdt, dS een element van dit boloppervlak en Q_n de zonale bolfunctie van de orde n , die OL tot as heeft. Dan is volgens een bekende stelling

$$\frac{4 \pi}{2 n + 1} r^2 (\mathbf{d}_r^{(n)})_P = \int \mathbf{d}_r Q_n dS, \quad (96)$$

waarbij de integratie over het boloppervlak wordt uitgestrekt, of wel

$$\frac{4 \pi}{2 n + 1} (\mathbf{d}_r^{(n)})_P = \psi,$$

als men

$$\psi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{d}_r Q_n \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

stelt.

Men kan deze integraal voor verschillende waarden van r berekenen en het is de vraag, hoe zij langs de lijn OL verandert, d. w. z. hoe zij van r afhangt. Om dit te vinden, vermenigvuldigen wij iederen term der vergelijking (91) met $Q_n d\vartheta d\varphi$ en integreeren naar ϑ en φ . Dit geeft

$$-\frac{D^2}{c^2} r^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{d}_r Q_n \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \mathbf{d}_r}{\partial \varphi^2} Q_n d\vartheta d\varphi \quad (97)$$

$$+ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \mathbf{d}_r}{\partial \vartheta} \right) Q_n d\vartheta d\varphi + \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \sin \vartheta \mathbf{d}_r) Q_n d\vartheta d\varphi.$$

De integralen in het rechterlid kunnen wij nu als volgt herleiden, waarbij een paar maal partiëel naar ϑ geïntegreerd wordt en de differentiaalvergelijking voor Q_n ,

$$n(n+1) Q_n + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d Q_n}{d\vartheta} \right) = 0,$$

wordt gebruikt. Verder is aangenomen, wat klaarblijkelijk geoorloofd is, dat de as van het coördinatenstelsel r, ϑ, φ langs de lijn OL wordt gelegd.

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \mathbf{d}_r}{\partial \varphi^2} Q_n d\vartheta d\varphi = \int_0^{\pi} Q_n \frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \mathbf{d}_r}{\partial \varphi^2} d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} Q_n \frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta \left[\frac{\partial \mathbf{d}_r}{\partial \varphi} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial \mathbf{d}_r}{\partial \vartheta} \right] Q_n d\vartheta d\varphi = - \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \frac{d Q_n}{d \vartheta} \frac{\partial \mathbf{d}_r}{\partial \vartheta} d\vartheta d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{d}_r \frac{d}{d \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{d Q_n}{d \vartheta} \right] d\vartheta d\varphi = - \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} n(n+1) \sin \vartheta Q_n \mathbf{d}_r d\vartheta d\varphi =$$

$$- n(n+1) \psi.$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r^2 \sin \vartheta \mathbf{d}_r] Q_n d\vartheta d\varphi = \frac{d^2}{d r^2} (r^2 \psi).$$

Hierdoor gaat verg. (97) over in

$$\frac{d^2 (r^2 \psi)}{d r^2} + \left\{ \frac{p^2}{c^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right\} r^2 \psi = 0.$$

Stelt men

$$\psi = \frac{f(r)}{r},$$

dan neemt deze vergelijking den vorm van verg. (70), pag. 50 aan. Daarvan kan men weer tot een vergelijking van de gedaante van verg. (71) overgaan, als men de veranderlijke

$$\frac{p}{c} r = \varrho$$

invoert. Stelt men n.l.

$$f(r) = \frac{g(\varrho)}{\sqrt{\varrho}}$$

en dus

$$\psi = \frac{g(\varrho)}{r \sqrt{\varrho}} = \frac{p}{c} \frac{g(\varrho)}{\varrho \sqrt{\varrho}},$$

dan moet $g(\varrho)$ voldoen aan

$$\frac{d^2 g(\varrho)}{d \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d g(\varrho)}{d \varrho} + \left\{ 1 - \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{\varrho^2} \right\} g(\varrho) = 0.$$

Van de beide oplossingen van deze vergelijking komt alleen de Besselsche functie $\mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}(\varrho)$ in aanmerking, daar de andere

voor $\varrho = 0$ een oneindig groote waarde voor ψ en dus voor $\mathbf{d}_r^{(n)}$ zou opleveren. Dat daarentegen de oplossing $\mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}(\varrho)$ voor $\varrho = 0$ tot geen moeilijkheden leidt, zal straks nog nader worden aangetoond.

De voor ψ gevonden differentiaalvergelijking leert ons dus, dat

$$\psi = C \frac{\mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}(\varrho)}{\varrho \sqrt{\varrho}} \quad (98)$$

is. Hierin is C een factor die constant is, zoolang men op een zelfde lijn OL blijft, maar die kan veranderen, als men aan die lijn een andere richting geeft. Daar nu $\mathbf{d}_r^{(n)}$ zich slechts door een constanten factor van ψ onderscheidt, is hiermede bewezen, dat in de ontwikkeling (95), welke ook de waarde van r zij, steeds dezelfde bolfuncties Y_n voorkomen.

Men ziet nu gemakkelijk in, dat elk der deelen, waarin wij \mathbf{d}_r hebben gesplitst, zich slechts door een constanten factor C_n van de in (83) voorkomende waarde van \mathbf{d}_1 onderscheidt. Vermenigvuldigen wij de uitdrukkingen (83) alle met dien factor C_n en voegen wij al de oplossingen bijeen, die op deze wijze aan de verschillende termen in de ontwikkeling (95) beantwoorden, dan verkrijgen wij een complex, dat aan de voorwaarden voldoet, die wij voor het complex C_1 hadden gesteld.

Wat het complex C_2 betreft, kan men op dezelfde wijze redeneeren, waarbij \mathbf{h}_r dezelfde rol speelt als in het voorgaande \mathbf{d}_r en het blijkt dus, dat inderdaad elke bewegingstoestand uit elementaire toestanden van den door (83) en (84) bepaalden aard kan worden opgebouwd.

Wat het aantal van elkaar onafhankelijke bewegingstoestanden betreft, moet nu nog het volgende worden opgemerkt.

Wanneer wij op de boven aangegeven wijze een werkelijk bestaanden toestand ontbinden, komen wij voor bepaalde waarden van n en p tot twee toestanden, een van het eerste en een van het tweede type, elk met een bepaalde bolfunctie Y_n , (die natuurlijk voor de twee toestanden verschillend kan wezen). Bij een

anderen werkelijke toestand zouden wij voor dezelfde waarden van p en n tot een andere bolfunctie Y_n geleid worden. Men moet nu echter bedenken, dat onder al de bolfuncties van de n^e orde slechts $2n + 1$ (in de keuze waarvan men een groote mate van vrijheid heeft) onafhankelijk van elkaar zijn; alle andere bolfunctie's van de n^e orde kunnen uit die $2n + 1$, elk met een geschikten constanten coëfficiënt vermenigvuldigd, worden samengesteld. Hieruit volgt dat het aantal mogelijke en van elkaar onafhankelijke bewegingstoestanden voor bepaalde waarden van p en n , door $2(2n + 1)$ wordt gegeven; men heeft n.l. met twee groepen (eerste en tweede type) elk van $2n + 1$ toestanden te doen, in welke $2n + 1$ vooraf gekozen, van elkaar onafhankelijke bolfunctie's Y_n , die men de fundamenteele kan noemen, voorkomen.

Wanneer in het vervolg van elementaire bewegingstoestanden sprake is, zullen wij steeds de nu bedoelde op het oog hebben. Bovendien zullen wij aannemen, dat voor elke waarde van n de $2n + 1$ fundamenteele bolfunctie's Y_n twee aan twee geconjugueerd zijn, d. w. z. dat, als Y_n en Y_n' twee dier functie's zijn

$$\int Y_n Y_n' dS = 0$$

is, als men de integratie over het boloppervlak uitstrekt. Wij zullen als bewezen aannemen, dat de fundamenteele bolfunctie's zoo gekozen kunnen worden, dat aan deze voorwaarden voldaan is.

Met een enkel woord komen wij nog terug op den toestand nabij het middelpunt van den bol. Daar wegens de solenoidale verdeeling der diëlectrische verplaatsing bij integratie over een boloppervlak r

$$\int \mathbf{d}_r dS = 0$$

is en $Q_0 = 1$ is, geeft de vergelijking (96)

$$\mathbf{d}_r^{(0)} = 0;$$

de index 0 is dus uitgesloten.

Wat $\mathbf{d}_r^{(1)}$ betreft, merken wij op, dat in de naaste omgeving van het middelpunt het electriche veld als homogeen, stel in de

richting h , beschouwd mag worden. Dan is op oneindig kleinen afstand van O , als $|\mathbf{d}|$ de sterkte van het veld in O voorstelt,

$$\mathbf{d}_r = |\mathbf{d}| \cos(r, h),$$

wat van den vorm $F_1 Y_1$ is.

De volgende coëfficiënten $F_2, F_3 \dots$, dus de waarden $\mathbf{d}_r^{(2)}, \mathbf{d}_r^{(3)}$, zijn alle, zooals men gemakkelijk aantoonst, nul in het middelpunt van den bol.

Hiermede is de formule (98) in overeenstemming. De bekende reeksontwikkeling van $\mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}(\varrho)$ naar de opklimmende machten van ϱ begint n.l. met $\varrho^{n+\frac{1}{2}}$ en de daaruit volgende reeks voor ψ met ϱ^{n-1} . Voor $\varrho = 0$ neemt dus ψ een eindige waarde aan, als $n = 1$ is, maar verdwijnt ψ voor alle hogere waarden van n .

§ 2.

Wij moeten nu bewijzen, dat op de elementaire bewegings-toestanden, waarin de algemeene toestand binnen den bol ontleed is, het principe van JEANS van toepassing is, dat dus de gevonden oplossingen overeenstemmen met de principale trillingen van een mechanisch systeem en dus iedere term in de uitdrukking voor de energie op slechts één dezer oplossingen betrekking heeft.

Inderdaad kunnen wij aantonen, dat als (\mathbf{d}, \mathbf{h}) en $(\mathbf{d}', \mathbf{h}')$ twee elementaire bewegings-toestanden aanduiden,

$$\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS = 0$$

en

$$\int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}') dS = 0$$

is, waarbij deze ruimte-integralen over den geheelen bol worden uitgestrekt.

Voor oplossingen met verschillende frequentie kan men dit op de volgende wijze uit de grondvergelijkingen voor het electromagnetisch veld afleiden.

Laat \mathbf{d}, \mathbf{h} evenredig zijn met e^{ipt} , \mathbf{d}', \mathbf{h}' met $e^{i p' t}$, dan is $\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS$ als volgt te herleiden:

$$\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS = \frac{1}{i p'} \int (\mathbf{d} \cdot \dot{\mathbf{d}}') dS = \frac{c}{i p'} \int (\mathbf{d} \cdot \text{rot } \mathbf{h}') dS =$$

$$\frac{c}{i p'} \int [\mathbf{h}' \cdot \mathbf{d}]_n dO + \frac{c}{i p'} \int (\mathbf{h}' \cdot \text{rot } \mathbf{d}) dS,$$

waarbij de oppervlakte-integraal genomen moet worden over het oppervlak van den bol; (de normaal is naar buiten getrokken). Zij valt weg, omdat aan het oppervlak van den bol \mathbf{d} normaal gericht is en dus

$$[\mathbf{h}' \cdot \mathbf{d}]_n = 0.$$

Men heeft verder

$$\frac{c}{i p'} \int (\mathbf{h}' \cdot \text{rot } \mathbf{d}) dS = - \frac{1}{i p'} \int (\mathbf{h}' \cdot \dot{\mathbf{h}}) dS = - \frac{p}{p'} \int (\mathbf{h}' \cdot \mathbf{h}) dS.$$

Derhalve

$$\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS = - \frac{p}{p'} \int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}') dS. \quad (99)$$

Natuurlijk mogen wij de twee bewegingstoestanden met elkaar verwisselen en hebben dus ook

$$\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS = - \frac{p'}{p} \int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}') dS. \quad (100)$$

Aan de verg. (99) en (100) kan, wanneer p en p' verschillen, niet voldaan worden, tenzij

$$\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS = 0 \quad (101)$$

en

$$\int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}') dS = 0 \quad (102)$$

is

Hierin zijn \mathbf{d} , \mathbf{d}' , \mathbf{h} , \mathbf{h}' de complexe uitdrukkingen door de verg. (83), (84) gegeven, terwijl nog moet worden aangetoond, dat dezelfde betrekkingen gelden voor de reële gedeelten dezer grootheden, die aan den werkelijken toestand beantwoorden. Wij stellen hiertoe voor den eenen bewegingstoestand

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} e^{i\delta} e^{ipt}$$

$$\mathbf{h} = i \mathbf{b} e^{i\delta} e^{ipt}$$

en voor den anderen

$$\begin{aligned} \mathbf{d}' &= \mathbf{a}' e^{i\delta'} e^{ip't} \\ \mathbf{h}' &= i \mathbf{b}' e^{i\delta'} e^{ip't}, \end{aligned}$$

waarbij $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$ reële vectoren zijn en er rekening mede gehouden is, dat in de vergelijkingen (83) en (84) \mathbf{d} en \mathbf{h} zich onderscheiden, doordat in de uitdrukkingen voor den eenen vector een factor i optreedt, die in de uitdrukking voor den anderen niet voorkomt.

Uit de verg. (101) en (102) volgt nu

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}') dS &= 0 \\ \int (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}') dS &= 0. \end{aligned} \tag{103}$$

De reële gedeelten van \mathbf{d} en \mathbf{h} zijn

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{a} \cos (pt + \delta) & \mathbf{h} &= -\mathbf{b} \sin (pt + \delta) \\ \mathbf{d}' &= \mathbf{a}' \cos (p't + \delta') & \mathbf{h}' &= -\mathbf{b}' \sin (p't + \delta'), \end{aligned} \tag{104}$$

zoodat voor deze reële vectoren $\mathbf{d}, \mathbf{d}', \mathbf{h}, \mathbf{h}'$ de beschouwde ruimte-integralen worden

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS &= \cos (pt + \delta) \cos (p't + \delta') \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}') dS \\ \int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}') dS &= \sin (pt + \delta) \sin (p't + \delta') \int (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}') dS. \end{aligned} \tag{105}$$

Uit verg. (103) volgt nu, dat beide integralen verdwijnen.

Behalve met verschillende frequentie's, komen ook elementaire toestanden voor met gelijke frequentie. Ten einde ook voor deze aan te toonen dat zij zoodanig gekozen zijn, dat het principe van JEANS van toepassing is, merken wij in de eerste plaats op, dat voor $p = p'$, uit verg. (99) en (100) volgt

$$\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS = - \int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}') dS,$$

of, wanneer wij de boven aangegeven waarden weer invoeren,

$$e^{i(2pt + \delta + \delta')} \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}') dS = e^{i(2pt + \delta + \delta')} \int (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}') dS$$

of

$$\int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}') dS = \int (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}') dS. \quad (106)$$

Nu gelden volgens de verg. (105) voor de reële vectoren \mathbf{d} , \mathbf{d}' , \mathbf{h} , \mathbf{h}' in dit geval de vergelijkingen

$$\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS = \cos (pt + \delta) \cos (pt + \delta') \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}') dS \quad (107)$$

$$\int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}') dS = \sin (pt + \delta) \sin (pt + \delta') \int (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}') dS. \quad (108)$$

Hieruit volgt, dat als men voor één der integralen $\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS$ en $\int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}') dS$ bewezen heeft, dat zij 0 is, dit tevens geldt voor de andere. Immers is $\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS = 0$, dan is volgens (107) $\int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}') dS = 0$, en dus volgens (106) $\int (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}') dS = 0$, zoodat verg. (108) eischt $\int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}') dS = 0$.

Wij kunnen hierbij in het voorbijgaan opmerken, dat nu gemakkelijk is aan te toonen, dat voor een elementaire bewegingswijze de gemiddelde waarde van de magnetische en electriche energie over een volle periode aan elkaar gelijk zijn.

Duiden wij met $(\overline{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}'})$, $(\overline{\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}'})$ de middelwaarden aan van $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}')$, $(\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}')$ over een periode, dan is volgens verg. (107) en (108)

$$\int (\overline{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}'}) dS = \frac{1}{2} \cos (\delta - \delta') \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}') dS$$

$$\int (\overline{\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}'}) dS = \frac{1}{2} \cos (\delta - \delta') \int (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}') dS$$

en is dus volgens (106)

$$\int (\overline{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}'}) dS = \int (\overline{\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}'}) dS.$$

Hebben nu \mathbf{d} en \mathbf{d}' , \mathbf{h} en \mathbf{h}' op denzelfden toestand betrekking, dan gaat deze betrekking over in

$$\int \bar{\mathbf{d}}^2 dS = \int \bar{\mathbf{h}}^2 dS,$$

waaruit de gelijkheid van de electricische en de magnetische energie bij een elementaire bewegingstoestand volgt.

Komen wij terug tot de twee elementaire bewegingswijzen met gelijke frequentie, dan kunnen wij opmerken, dat zij alleen voorkomen bij gelijke waarden van n en dat zij bovendien tot hetzelfde type behooren, daar de p 's bij de twee verschillende typen uit twee verschillende vergelijkingen bepaald worden (zie verg. 83 en 84). Wij beschouwen dus twee toestanden, die behooren tot een zelfde groep van $2n + 1$ oplossingen, welke zich onderscheiden, doordat er verschillende fundamenteele bolfunctie's Y_n in voorkomen.

Laat beide toestanden behooren tot het eerste type, zoodat de eene bepaald wordt door de verg. (85), de tweede door

$$\mathbf{d}'_1 = \frac{c}{p} a' n (n+1) \frac{f(r)}{r} Y'_n \mathbf{k} \sin (pt + \delta')$$

$$\mathbf{d}'_2 = \frac{c}{p} a' \frac{d [r f(r)]}{dr} \text{grad } Y'_n \sin (pt + \delta')$$

$$\mathbf{h}' = - a' r f(r) [\mathbf{k} \cdot \text{grad } Y'_n] \cos (pt + \delta'),$$

dan is het, volgens hetgeen hierboven gezegd is, voldoende, wanneer wij bewijzen, dat

$$\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS = 0.$$

Daar de vector \mathbf{d} bestaat uit de componenten \mathbf{d}_1 en \mathbf{d}_2 en evenzoo \mathbf{d}' uit \mathbf{d}'_1 en \mathbf{d}'_2 , heeft men

$$\int (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}') dS = \int (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}'_1) dS + \int (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}'_2) dS + \int (\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{d}'_1) dS + \int (\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{d}'_2) dS.$$

Van elk dezer vier integralen kan worden aangetoond, dat zij 0 is. Voor de tweede en derde volgt dit uit het feit, dat \mathbf{d}_1 loodrecht op \mathbf{d}'_2 , en \mathbf{d}_2 loodrecht op \mathbf{d}'_1 staat; immers \mathbf{d}_1 en \mathbf{d}'_1 zijn volgens den straal r gericht, terwijl $\text{grad } Y_n$ en $\text{grad } Y'_n$, en dus ook \mathbf{d}_2 en \mathbf{d}'_2 loodrecht daarop staan.

Dat

$$\int (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_1') dS = 0$$

is, volgt uit de keuze der bolfunctie's, die zooals vermeld is, geconjugueerd zijn, zoodat

$$\int Y_n Y'_n dO = 0.$$

Het is duidelijk, dat het bewijs voor de laatste integraal,

$$\int (\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{d}_2') dS = 0$$

geleverd zal zijn, wanneer men heeft aangetoond, dat

$$\int (\mathbf{grad} Y_n \cdot \mathbf{grad} Y'_n) dO = 0.$$

Nu heeft in eenig punt van het boloppervlak met straal r $\mathbf{grad} Y_n$ twee onderling loodrechte componenten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial Y_n}{\partial \vartheta} \text{ en } \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi};$$

evenzoo heeft $\mathbf{grad} Y'_n$ twee componenten volgens dezelfde richtingen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial Y'_n}{\partial \vartheta} \text{ en } \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial Y'_n}{\partial \varphi}.$$

Dus is

$$(\mathbf{grad} Y_n \cdot \mathbf{grad} Y'_n) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial Y_n}{\partial \vartheta} \frac{\partial Y'_n}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi} \frac{\partial Y'_n}{\partial \varphi} \right).$$

Daar

$$dO = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

is, moeten wij dus bewijzen

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Y_n}{\partial \vartheta} \frac{\partial Y'_n}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi} \frac{\partial Y'_n}{\partial \varphi} \right) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0.$$

Men vindt voor deze integraal door partiële integratie, wanneer men n.l. $\frac{\partial Y'_n}{\partial \vartheta}$ naar ϑ en $\frac{\partial Y'_n}{\partial \varphi}$ naar φ integreert,

$$- \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y'_n \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial Y_n}{\partial \vartheta} \right] + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} \right\} d\vartheta d\varphi,$$

waarvoor men gebruik makende van de differentiaalvergelijking (69), waaraan Y_n voldoet, kan schrijven

$$n(n+1) \int \int Y_n Y'_n \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

welke uitdrukking door de keuze der bolfunctie's werkelijk nul is.

Voor twee toestanden die beide tot het tweede type behooren, bewijst men op dergelijke wijze

$$\int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}') dS = 0.$$

Hiermede is voldoende aangetoond, dat het principe van JEANS op de gevonden oplossingen van toepassing is.

§ 3.

Om de energie binnen den bol te berekenen, kunnen wij dus één der elementaire bewegingstoestanden beschouwen, welke gegeven zijn door verg. (83), zoo zij tot het eerste type behooren of door verg. (84), zoo zij tot het tweede type behooren.

De frequentie's, die bij deze toestanden mogelijk zijn, worden in het eerste geval bepaald door de wortels van de vergelijking

$$\frac{d[r f(r)]}{dr} = 0 \text{ voor } r = R,$$

in het tweede geval door de wortels der vergelijking

$$f(r) = 0 \text{ voor } r = R,$$

waarbij $f(r)$ voldoet aan verg. (70).

Het aantal frequentie's tusschen de grenzen p en $p + dp$ komt dus overeen met het aantal wortels, dat tusschen de genoemde grenzen ligt.

Ten einde dit aantal te berekenen, zullen wij gebruik maken van de op pag. 50 gegeven voorstelling van $f(r)$ met een Besselsche functie. Wij vonden daar, als

$$\frac{pr}{c} = \varrho$$

is,

$$f(r) = \frac{\mathcal{J}_{n+\frac{1}{2}}(\varrho)}{\sqrt{\varrho}}$$

Daar de golflengte der trillingen klein is t.o.z. van de gedeelten van den straal, die beschouwd zullen worden, komen alleen groote waarden van ϱ in aanmerking. Bovendien zal het blijken, dat hetgeen toestanden met een kleine waarde van n tot de energie bijdragen, te verwaarloozen is tegenover de energie van de toestanden met zeer groote waarde van n , zoodat wij ook n als een groot getal mogen beschouwen.

Dit in aanmerking nemende, kunnen wij gebruik maken van ¹⁾ de reeksontwikkelingen voor Besselsche functie's van NICHOLSON.

Deze zullen wij zonder verder bewijs overnemen, terwijl wij ons tevens zullen veroorloven de strengheid eenigszins aan de aanschouwelijkheid op te offeren.

NICHOLSON geeft drie reeksontwikkelingen waarvan wij voorloopig alleen de beide eerste A en B zullen beschouwen.

De reeksontwikkeling A geldt voor $n < \varrho$.

Met een eenigszins gewijzigde notatie luidt zij

$$\mathcal{J}_n(\varrho) = \left(\frac{2K}{\pi\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \sigma, \quad 2)$$

1) Phil. Mag. 6. Vol. 19. Pag. 228.

2) In de notatie van NICHOLSON is de reeks

$$\mathcal{J}_n(z) = \left(\frac{2R}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \varrho$$
$$z = \lambda r$$

$$R = \sec a + \frac{\lambda_2}{z^2} \sec^3 a + \dots$$

$$\varrho = \frac{1}{4} \pi + z \left\{ \cos a - \left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin a \right\} +$$
$$\dots - \frac{1}{n} \left\{ \frac{\mu_4}{n^2} \operatorname{tg} a + \dots \right\} + \dots$$
$$n = z \sin a$$

$\lambda_2, \mu_4 \dots$ zijn constanten.

waarin met voor ons doel voldoende benadering

$$K = \frac{1}{\sin \beta}$$

$$\sigma = \frac{1}{4} \pi + \varrho (\sin \beta - \beta \cos \beta)$$

is, terwijl β bepaald wordt door

$$\cos \beta = \frac{n}{\varrho}$$

en n een gebroken getal is, dat wij door $n + \frac{1}{2}$ hebben voorgesteld. Voor de groote waarden van n , die in aanmerking komen, behoeven wij echter op dit verschil met een geheel getal niet te letten.

Men kan zèggen, dat $f(r)$ in dit geval een goniometrische functie is, waarvan de periode en amplitudo langzaam veranderen.

Immers als men

$$\sin \beta - \beta \cos \beta = k$$

stelt, komt in $f(r)$ voor

$$\sin \left(k \varrho + \frac{1}{4} \pi \right) = \sin \left(\frac{k p}{c} r + \frac{1}{4} \pi \right).$$

Wanneer k een constante was, zou $f(r)$ dus een periode $\frac{2 \pi c}{k p} = \frac{1}{k} \lambda$ hebben.

Hieruit volgt, dat $f(r)$ bij een willekeurige verplaatsing langs den straal, die steeds groot zal zijn t. o. z. van de golflengte, vele malen in teeken zal wisselen.

Verder ziet men gemakkelijk in, dat k en dus ook de periode weinig verandert, wanneer men over den afstand $\frac{1}{k} \lambda$ voortgaat.

Hetzelfde geldt voor $\sin \beta$ en dus ook voor de amplitudo.

De reeksontwikkeling B van NICHOLSON geldt voor $n > \varrho$.

In dit geval is

$$\mathcal{J}_n(\varrho) = \left(\frac{2 T}{\pi \varrho} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\tau}, *$$

*) In de notatie van N luidt de reeks

$$\mathcal{J}_n(z) = \left(\frac{2 T}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} e^t,$$

waarbij voor groote waarde van n

waarin met voor ons doel weer voldoende benadering

$$2 T = \frac{1}{\sinh \beta}$$

en

$$\tau = \varrho (\sinh \beta - \beta \cosh \beta) - \frac{1}{2} \log 2$$

is, terwijl β bepaald wordt door

$$\cosh \beta = \frac{n}{\varrho}.$$

Daar $\frac{n}{\varrho} = \frac{nc}{pr} = \frac{n\lambda}{2\pi r}$ is, neemt $\cosh \beta$ toe, wanneer r afneemt.

Ditzelfde geldt voor β , daar de verandering van β in dezelfde richting is als die van $\cosh \beta$, hetgeen men gemakkelijk aantoot.

Verder kan men bewijzen, dat $\sinh \beta - \beta \cosh \beta$ steeds negatief is en in absolute waarde toeneemt, als β grooter wordt.

Hieruit volgt, dat τ negatief is en dat de absolute waarde van den factor $\sinh \beta - \beta \cosh \beta$ toeneemt, als r kleiner wordt. Dit zou er toe leiden, dat e^τ naar het middelpunt toe afneemt. In hoeverre dit door den factor ϱ in τ anders kan worden, behoeft hier niet te worden nagegaan.

De oplossing B kan een exponentiële functie genoemd worden, evenals wij bij A van een goniometrische spraken.

Wil men op eenvoudige wijze zich er rekenschap van geven, dat de Besselsche functie in de beide genoemde gevallen van den aangegeven aard is, dan kan men in de differentiaalvergelijking voor $\mathcal{J}_n(\varrho)$:

$$\frac{d^2 \mathcal{J}_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d \mathcal{J}_n}{d\varrho} + \left(1 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right) \mathcal{J}_n = 0,$$

$$T = \frac{1}{2 \sinh \beta}$$

$$t = n (\operatorname{tgh} \beta - \beta) - \frac{1}{2} \log 2$$

$$\cosh \beta = \frac{n}{z}.$$

$$\mathcal{J}_n = \frac{\chi}{\sqrt{\varrho}}$$

substitueeren. Dit geeft

$$\frac{d^2 \chi}{d \varrho^2} + \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4\varrho^2}\right) \chi = 0,$$

waarin voor groote waarden van n , $n^2 - \frac{1}{4}$ door n^2 vervangen kan worden.

Men ziet, dat de coëfficiënt van χ voor $n < \varrho$ positief, voor $n > \varrho$ negatief is. Het is dus begrijpelijk, dat χ in het eene geval min of meer zal gelijken op een oplossing van de vergelijking

$$\frac{d^2 \chi}{d \varrho^2} + k^2 \chi = 0$$

en in het andere geval op een oplossing van

$$\frac{d^2 \chi}{d \varrho^2} - k^2 \chi = 0.$$

De oplossingen van deze vergelijkingen, waarin k een constante is, zijn resp. een goniometrische en een exponentiële functie.

Het verdient opmerking, dat indien men de functie $\mathcal{J}_n(\varrho)$ over een groot interval van ϱ van 0 af te beschouwen heeft, gelijktijdig de twee vormen A en B te pas komen. Met den eersten heeft men te doen voor $\varrho > n$, dus voor

$$r > \frac{cn}{p}, \text{ d. i. } r > \frac{n\lambda}{2\pi}$$

en met den tweeden voor kleinere waarden van r . Bij bepaalde waarden van n en p is er dus een „kritische bol” met den straal

$$r_0 = \frac{cn}{p}.$$

Buiten den kritischen bol geldt de ontwikkeling A, er binnen de ontwikkeling B.

Strikt genomen gelden A en B niet tot aan den kritischen bol. Er is n.l. verondersteld, dat de absolute waarde van $n - \varrho$ niet zeer klein zal zijn in vergelijking met n of ϱ .

Voor het geval, dat dit wel zoo is, heeft NICHOLSON een derde

reeksontwikkeling gegeven, die in de „kritische laag” geldt en zich aan A en B aansluit.

Wij moeten nu zoeken, hoeveel bewegingstoestanden, vooreerst bij bepaalde waarde van n , mogelijk zijn. Deze kunnen zijn van het eerste of tweede der vroeger onderscheiden typen.

Zoals reeds gezegd is, moet daartoe voor $r = R$ voldaan worden aan

$$\frac{d[r f(r)]}{dr} = 0 \quad (109)$$

of

$$f(r) = 0. \quad (110)$$

Wij zullen ons nu vooreerst de vraag stellen, welke waarden van r aan verg. (110) voldoen.

Daar $r f(r)$ zich slechts door een constanten factor van de boven ingevoerde functie χ onderscheidt, moeten wij de aandacht vestigen op die waarden van ϱ voor welke χ verdwijnt. Evenzoo komt de voorwaarde (109) overeen met het verdwijnen van $\frac{d\chi}{d\varrho}$.

Zoowel het een als het ander kan alleen plaats hebben buiten den kritischen bol; immers de ontwikkeling B vertoont niet het voortdurend wisselen in teeken, dat bij A is opgemerkt.

Zij dus in de vergelijking

$$\frac{d^2 \chi}{d \varrho^2} + \left(1 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right) \chi = 0$$

de coëfficiënt van χ positief. Men kan nu gemakkelijk aantonen, dat het aantal wortels van de vergelijkingen $\chi = 0$ en $\frac{d\chi}{d\varrho} = 0$ even groot is.

Laat n.l. χ verdwijnen voor twee waarden van ϱ (ϱ_1 en ϱ_2) en daartusschen het positieve teeken hebben. Dan volgt uit de differentiaalvergelijking, dat $\frac{d^2 \chi}{d \varrho^2}$ tusschen ϱ_1 en ϱ_2 steeds het negatieve teeken heeft en moet dus $\frac{d\chi}{d\varrho}$ van ϱ_1 naar ϱ_2 steeds

in dezelfde richting veranderen. Daar echter

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\chi}{d\varrho} d\varrho = 0$$

is, moet in het interval ϱ_1, ϱ_2 $\frac{d\chi}{d\varrho}$ voor een deel een positieve, voor een ander deel een negatieve waarde hebben. Men kan hieruit afleiden, dat tusschen ϱ_1 en ϱ_2 $\frac{d\chi}{d\varrho}$ eenmaal en ook niet meer de waarde nul aanneemt.

Hieruit volgt, dat over een voldoende uitgestrekt interval van ϱ het aantal wortels van $\chi = 0$ even groot is als van $\frac{d\chi}{d\varrho} = 0$.

Er is verondersteld dat geen wortels van beide vergelijkingen samenvallen.

Wij kunnen dus volstaan met het aantal oplossingen van het tweede type te bepalen.

Zooals reeds is opgemerkt, kan aan de grensvoorwaarde alleen voldaan worden, als aan het oppervlak van den bolvormigen geleider de ontwikkeling A geldt, als dit dus buiten den kritischen bol ligt. Dit is het geval, als

$$n < \frac{pR}{c}, \text{ of } n < \frac{2\pi R}{\lambda}.$$

Wanneer wij dus een bepaalde waarde van p of een bepaald interval dp in het oog vatten, kan n alleen variëeren van 0 tot $\frac{pR}{c}$.

Tevens blijkt het, dat bij elken werkelijk bestaanden toestand een kritische bol binnen den bolvormigen geleider gevonden wordt, waarvan de straal bepaald wordt door

$$r_0 = \frac{nc}{p} = \frac{n\lambda}{2\pi}.$$

Wij merken hier reeds op, dat de energie van zulk een toe-

stand met een groote waarde van n zoo goed als geheel buiten den kritischen bol gevonden wordt. Terwijl dus de bewegings-toestanden, die aan kleine waarden van n beantwoorden, den geheelen bol vullen, zijn de hoogere trillingstoestanden meer en meer tot het buitenste deel daarvan bepaald.

Men kan de voorwaarde

$$z = 0$$

vervangen door

$$\mathcal{J}_n(\varrho) = 0,$$

hetgeen meebrengt, dat

$$\sigma = \frac{1}{4} \pi + \varrho (\sin \beta - \beta \cos \beta)$$

een veelvoud moet zijn van π en wel moet dit het geval zijn voor $r = R$.

Bedenken wij verder, dat

$$\varrho = \frac{n}{\cos \beta},$$

dan vinden wij, wanneer wij n constant houden,

$$d\sigma = \sin \beta d\varrho = \sqrt{1 - \frac{n^2}{\varrho^2}} d\varrho.$$

Wij laten nu ook R constant en laten p veranderen, ten einde te zien voor welke frequentie's p aan de voorwaarde voldaan wordt.

Men heeft dan

$$d\sigma = \sqrt{1 - \frac{n^2 c^2}{p^2 R^2}} \frac{R}{c} dp.$$

Dezelfde betrekking geldt ook voor gelijktijdige veranderingen Δp en $\Delta \sigma$, waarbij de eerste alleen gebonden is aan de voorwaarde, dat zij klein is in vergelijking met p zelf.

Stelt men $\Delta p = \varepsilon p$, waarin ε een zeer klein getal is, dan wordt

$$\Delta \sigma = \sqrt{1 - \frac{n^2 c^2}{p^2 R^2}} \frac{Rp}{c} \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{n^2 c}{p^2 R^2}} \frac{2\pi R}{\lambda} \varepsilon$$

en dit kan, hoe klein ε ook zij, vele intervallen π omvatten, als slechts R groot genoeg is in vergelijking met λ .

Voor het aantal wortels vinden wij dus

$$\frac{\Delta \sigma}{\pi}$$

of, als wij inplaats van Δp weer dp schrijven,

$$\frac{R}{\pi c} \sqrt{1 - \frac{n^2 c^2}{p^2 R^2}} dp.$$

Ten einde nu alle bewegingstoestanden in het interval dp te vinden, moet nog in aanmerking genomen worden, dat bij iedere frequentie $2n+1$ toestanden behooren met verschillende Y_n , terwijl n bovendien alle waarden kan doorloopen van 1 tot $\frac{pR}{c}$. (Wij hebben n.l. op pag. 64 aangetoond, dat de waarde $n=0$ is uitgesloten). Verder moet, om ook de oplossingen van het tweede type te omvatten, met 2 vermenigvuldigd worden.

Het gezochte aantal wordt dus

$$\frac{2R}{\pi c} dp \sum_{n=1}^{n=\frac{pR}{c}} (2n+1) \sqrt{1 - \frac{n^2 c^2}{p^2 R^2}}.$$

Het groot aantal termen maakt het geoorloofd deze som door een integraal te vervangen, waarbij voor de onderste grens 0 genomen kan worden, terwijl $2n+1$ door $2n$ vervangen mag worden.

Wij vinden dan

$$\frac{2R}{\pi c} dp \int_0^{\frac{pR}{c}} 2n \sqrt{1 - \frac{n^2 c^2}{p^2 R^2}} dn$$

of wel

$$\frac{4R^3}{3\pi c^3} p^2 dp$$

bewegingstoestanden.

Kennen wij aan elk daarvan een energie $\frac{2}{3} \alpha T$ toe, dan wordt de energie binnen den bol

$$\frac{8\alpha T R^3}{9\pi c^3} p^2 dp$$

en de energie per volume-eenheid

$$\frac{2 \alpha T}{3 \pi^2 c^3} p^2 dp,$$

hetgeen volkomen overeenstemt met hetgeen voor de energie-dichtheid binnen het parallelepipedum gevonden is.

§ 4.

Bij nadere beschouwing van het stralingsveld binnen den bol moet in de eerste plaats worden aangetoond, dat de toestand isotroop is, dat dus de energie per volume-eenheid voor alle punten gelijk is.

Bij de beschouwde bolvormige ruimte is te verwachten, dat de toestand in alle punten op gelijken afstand van het middelpunt hetzelfde is. Dit is wel niet het geval voor de elementaire toestanden, waarin wij den algemeenen toestand ontleed hebben, daar deze afhangen van een bepaalde algemeene bolfunctie.

De werkelijke toestand ontstaat echter door de superpositie van een zeer groot aantal van deze elementaire toestanden, waarbij de polen der algemeene bolfunctie's willekeurig over het boloppervlak verspreid zijn, zoodat de isotropie zeer verklaarbaar is en niet nader door ons zal worden onderzocht.

Wij zullen ons er toe beperken aan te toonen, dat de energie-dichtheid in punten op ongelijken afstand van het middelpunt van den bol even groot is en hebben hiervoor slechts te bewijzen, dat de energie binnen een bol met straal r evenredig is met den inhoud, dus met r^3 .

Hiertoe zullen wij voor één der elementaire bewegingstoestanden bepalen, welk gedeelte van de energie, die zich binnen den bolvormigen geleider bevindt, binnen de bolvormige ruimte met straal r een plaats vindt.

Daar beide typen van elementaire bewegingstoestanden, welke door verg. (83) en (84) gegeven zijn, evenveel tot de energie bijdragen, komt het er niet op aan, welken toestand wij beschouwen.

Nemen wij dien, welke gegeven is door verg. (83), dan is de grensvoorwaarde

$$\frac{d[r f(r)]}{dr} = 0 \text{ voor } r = R$$

en is de energie per volume-eenheid, van constante factoren afgezien,

$$\begin{aligned} & r^2 \{f(r)\}^2 |\text{grad } Y_n|^2 \cos^2(pt + \delta) + \\ & \frac{c^2}{p^2} n^2 (n+1)^2 \frac{|f(r)|^2}{r^2} Y_n^2 \sin^2(pt + \delta) + \\ & \frac{c^2}{p^2} \left\{ \frac{d[r f(r)]}{dr} \right\}^2 |\text{grad } Y_n|^2 \sin^2(pt + \delta). \end{aligned}$$

Bedenken wij, dat

$$\int |\text{grad } Y_n|^2 dO = \frac{n(n+1)}{r^2} \int Y_n^2 dO$$

is en vervangen wij $\sin^2(pt + \delta)$ en $\cos^2(pt + \delta)$ door $\frac{1}{2}$, hetgeen geoorloofd is, wanneer wij de gemiddelde energie bepalen over een tijd, die vele perioden bevat, dan vinden wij voor de energie binnen een bolschil tusschen twee bollen met stralen a en b

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} n(n+1) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_n^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \int_a^b \left[r^2 \{f(r)\}^2 + \right. \\ & \left. \frac{c^2}{p^2} n(n+1) \{f(r)\}^2 + \frac{c^2}{p^2} \left\{ \frac{d[r f(r)]}{dr} \right\}^2 \right] dr. \quad (111) \end{aligned}$$

Nu voldoet $r f(r)$ aan de vergelijking

$$\frac{d^2[r f(r)]}{dr^2} + \left[\frac{p^2}{c^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] r f(r) = 0,$$

waaruit door vermenigvuldiging met $r f(r)$ volgt

$$r f(r) \frac{d^2[r f(r)]}{dr^2} + \left[\frac{p^2}{c^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \{r f(r)\}^2 = 0$$

of

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left[r f(r) \frac{d[r f(r)]}{dr} \right] - \left[\frac{d[r f(r)]}{dr} \right]^2 + \\ & \left[\frac{p^2}{c^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \{r f(r)\}^2 = 0. \quad (112) \end{aligned}$$

Wanneer r verandert, zal $\frac{d[r f(r)]}{dr}$ een groot aantal malen van teeken wisselen, daar de waarden van r , waarvoor $\frac{d[r f(r)]}{dr} = 0$ is, op afstanden van de orde van grootte van een golflengte uiteenliggen. Wanneer dus $b-a$, de dikte der bolschil, zooals wij mogen veronderstellen, groot is in vergelijking met de golflengte, dan mogen wij zonder noemenswaard aan de waarde der integraal (111) te veranderen, a en b vervangen door de naastbijliggende waarden van r , voor welke $\frac{d[r f(r)]}{dr} = 0$ is.

Dan volgt uit verg. (112)

$$-\int_a^b \left[\frac{d[r f(r)]}{dr} \right]^2 dr + \int_a^b \left[\frac{p^2}{c^2} r^2 - n(n+1) \right] \{f(r)\}^2 dr = 0.$$

Dientengevolge gaat de laatste integraal van (111) over in

$$2 \int_a^b r^2 \{f(r)\}^2 dr.$$

Wanneer wij dus de energie in de verschillende bolvormige schillen (a , b) met elkaar vergelijken, hebben wij slechts de waarden van

$$\int_a^b r^2 \{f(r)\}^2 dr \tag{113}$$

te vergelijken.

Om deze uitdrukking verder te herleiden, gaan wij uit van de differentiaalvergelijking voor $r f(r)$, waarbij wij ter bekorting

$$r f(r) = \chi$$

en

$$\frac{p}{c} = \mu$$

stellen.

De functie χ voldoet dan aan de vergelijking

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left[\mu^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \chi = 0.$$

Laten nu χ_1 en χ_2 oplossingen van deze vergelijking zijn, voor de waarden μ_1 en μ_2 , zoodat de vergelijkingen

$$\frac{d^2 \chi_1}{dr^2} + \left[\mu_1^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \chi_1 = 0 \quad (114)$$

en

$$\frac{d^2 \chi_2}{dr^2} + \left[\mu_2^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \chi_2 = 0 \quad (115)$$

bestaan.

Uit deze beide vergelijkingen volgt

$$\chi_2 \frac{d^2 \chi_1}{dr^2} - \chi_1 \frac{d^2 \chi_2}{dr^2} + (\mu_1^2 - \mu_2^2) \chi_1 \chi_2 = 0$$

of

$$\chi_1 \chi_2 = \frac{1}{\mu_2^2 - \mu_1^2} \left(\chi_2 \frac{d^2 \chi_1}{dr^2} - \chi_1 \frac{d^2 \chi_2}{dr^2} \right)$$

en

$$\int_a^b \chi_1 \chi_2 dr = \frac{1}{\mu_2^2 - \mu_1^2} \left[\chi_2 \frac{d\chi_1}{dr} - \chi_1 \frac{d\chi_2}{dr} \right]_a^b \quad (116)$$

Nu volgt uit verg. (114) en (115), dat, wanneer $\chi_1(r)$ de eene functie is, voor de andere $\chi_2 = \chi_1 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} r \right)$ gesteld kan worden.

Zij nu $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1 + \delta$, waarbij δ een oneindig kleine grootheid voorstelt, dan is

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \chi_1 [(1 + \delta) r] = \chi_1(r) + \delta r \chi_1'(r). \\ \frac{d\chi_2}{dr} &= \chi_1'(r) + \delta \chi_1'(r) + \delta r \chi_1''(r). \end{aligned}$$

Dus is

$$\begin{aligned} \chi_2 \frac{d\chi_1}{dr} - \chi_1 \frac{d\chi_2}{dr} &= [\chi_1(r) + \delta r \chi_1'(r)] \chi_1'(r) \\ &\quad - \chi_1(r) [\chi_1'(r) + \delta \chi_1'(r) + \delta r \chi_1''(r)] = \\ &= \delta \{ r [\chi_1'(r)]^2 - \chi_1(r) \chi_1'(r) - r \chi_1(r) \chi_1''(r) \}. \end{aligned}$$

Wij vinden dus voor de uitdrukking (116), wanneer wij bedenken, dat

$$\mu_2^2 - \mu_1^2 = 2 \mu_1^2 \delta$$

is en den index 1 weglaten,

$$\int_a^b [\chi(r)]^2 dr = \frac{1}{2\mu^2} \left[r \chi'(r)^2 - \chi(r) \chi'(r) - r \chi(r) \chi''(r) \right]_a^b$$

Ten slotte vinden wij, wanneer wij voor $r = a$ en $r = b$ $\chi'(r) = 0$ stellen,

$$\int_a^b [\chi(r)]^2 dr = -\frac{1}{2\mu^2} \left[r \chi(r) \chi''(r) \right]_a^b \quad (117)$$

Wij zullen nu verder weer gebruik maken van de reeksontwikkelingen van NICHOLSON, die, zooals gezegd is, verschillend zijn, naar gelang r grooter of kleiner is dan de straal van den kritischen bol, die bij de beschouwde oplossing behoort en die bepaald wordt door

$$r_0 = \frac{c}{p} n.$$

Zooals reeds is opgemerkt zal voor die bewegingstoestanden, die het meest tot de energie bijdragen, de energie voornamelijk buiten den kritischen bol gevonden worden en zullen wij van de energie binnen den kritischen bol en in de kritische laag mogen afzien.

In hoeverre dit geoorloofd is, zal uit het volgende blijken.

Buiten den kritischen bol geldt de ontwikkeling A (zie pag. 72), waarbij

$$\mathcal{J}_n(\varrho) = \left(\frac{2K}{\pi\varrho} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \sigma.$$

Nu is

$$\varrho = \frac{p}{c} r = \mu r$$

en

$$r f(r) = \frac{c}{p} \mathcal{J}_n(\varrho) \sqrt{\varrho} = \frac{1}{\mu} \mathcal{J}_n(\varrho) \sqrt{\varrho}.$$

Hieruit volgt, dat de energiedichtheid, die bepaald wordt door $\{r f(r)\}^2$, wat orde van grootte betreft, evenredig is met

$$K = \frac{1}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{\varrho^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}}.$$

Passen wij de ontwikkeling A toe tot in de onmiddellijke nabijheid van den kritischen bol, zoodat wij $r = r_0 + \delta$ kunnen stellen, waarbij δ een zeer kleine grootte is, dan vinden wij, dat in die punten de energiedichtheid oneindig groot wordt op de wijze van $\frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{r - r_0}}$.

Dan komt echter in de uitdrukking voor de energie in het gedeelte der kritische laag tusschen r_0 en $r_0 + \delta$ de factor $\sqrt{\delta} = \sqrt{r - r_0}$ voor; daarom is die energie te verwaarloozen t. o. z. van de energie buiten den kritischen bol.

NICHOLSON geeft voor de punten in de onmiddellijke nabijheid van den kritischen bol een derde reeksontwikkeling, waarbij, met voor ons voldoende benadering,

$$\mathcal{J}_n(\varrho) = \left(\frac{2K}{\pi\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \sigma$$

$$K = \left[\frac{\varrho}{2(\varrho - n)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varrho = \frac{2}{3}(\varrho - n)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\pi$$

is.

Het is gemakkelijk in te zien, dat deze ontwikkeling voor de energie in dit deel der kritische laag dezelfde orde van grootte geeft, als wij zoo even vonden.

Beschouwen wij nu de ruimte binnen den kritischen bol, dan geldt de ontwikkeling B en is dus (pag. 73)

$$\mathcal{J}_n(\varrho) = \left(\frac{2T}{\pi\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\tau}$$

en zal $\{r f(r)\}^2$ en daarmee de energiedichtheid afhangen van $Te^{2\tau}$.

Nu is

$$2T = \frac{1}{\sinh \beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{Q^2} - 1}} = \frac{r}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}}.$$

Verder is

$$\tau = Q (\sinh \beta - \beta \cosh \beta) - \frac{1}{2} \log 2.$$

Laten wij constante factoren weg, dan is dus

$$e^{2\tau} = e^{2Q \sqrt{\left(\frac{n^2}{Q^2} - 1\right)}} e^{-2n\beta} = e^{2n \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n} \left\{ \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}} \right\}^{2n}.$$

De energiedichtheid is dus evenredig met

$$\frac{\frac{r}{r_0}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}} \left\{ \frac{r}{r_0} \frac{e^{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}} \right\}^{2n}.$$

Het is duidelijk, dat deze uitdrukking bij groote waarden van n met r zeer snel afneemt en alleen in de onmiddellijke nabijheid van den kritischen bol een in aanmerking te nemen waarde vertoont.

De totale energie in dit gedeelte der kritische laag zal echter, evenals in het gedeelte buiten den kritischen bol, te verwaarloozen zijn.

Stelt men n.l. $r_0 - r = \delta$, dan wordt de uitdrukking, wat orde van grootte betreft $\frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{r_0 - r}}$ en is dus de energie in dit deel der laag ook van de orde $\sqrt{r_0 - r}$.

Wij keeren nu terug tot verg. (117) en maken gebruik van de reeksontwikkeling A, zoodat we stellen

$$\chi(r) = r f(r) = \frac{c}{\rho} \left(\frac{2K}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \sigma.$$

Daar het ons doel is de energie in den bol met willekeurigen straal te vergelijken met de energie in den bolvormigen geleider, kunnen wij de factoren $-\frac{1}{2\mu^2}$ in (117) en $\frac{c}{\rho} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$ in de uitdrukking voor $\chi(r)$ buiten beschouwing laten.

Wij moeten dus de waarde van

$$\left| r \chi(r) \chi''(r) \right|_a^b \quad (118)$$

bepalen en wel voor de grenzen $a=r_0$, $b=r$ en $a=r_0$, $b=R$, terwijl

$$\chi(r) = \sqrt{K} \sin \sigma$$

$$K = \frac{1}{\sin \beta}$$

$$\cos \beta = \frac{n}{\mu r} = \frac{r_0}{r}$$

is.

Bovendien maken wij gebruik van de betrekking

$$d\sigma = \sin \beta d\varrho = \mu \sin \beta dr.$$

Daar nu μ van de orde van grootte van $\frac{1}{\lambda}$ is, zullen de termen, die verkregen worden bij het differentiëren van σ , zeer groot zijn in vergelijking met de overige, zoodat wij kunnen volstaan met alleen die termen in rekening te brengen.

Wij gaan dus uit van

$$\chi(r) = \sqrt{K} \sin \sigma$$

en vinden

$$\chi'(r) = \sqrt{K} \cos \sigma \frac{d\sigma}{dr} = \mu \sqrt{K} \cos \sigma \sin \beta$$

$$\chi''(r) = -\mu^2 \sqrt{K} \sin \sigma \sin^2 \beta.$$

De waarde van (118) wordt dus met weglating van een constanten factor,

$$|r K \sin^2 \sigma \sin^2 \beta|_a^b = |r \sin^2 \sigma \sin \beta|_a^b.$$

Bedenken wij verder, dat $\chi'(r) = 0$ meebrengt, dat $\cos \sigma = 0$ en dus $\sin^2 \sigma = 1$ is, dan vinden wij ten slotte

$$\left| r \sin \beta \right|_a^b = \left| r \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \right|_a^b.$$

Van de totale energie, die bij den beschouwden bewegings-toestand behoort, bevindt zich dus een fractie

$$\frac{\left| r \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \right|_{r_0}^r}{\left| r \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \right|_{r_0}^R} = \frac{r \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}}{R \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}}} \quad (119)$$

binnen een bol met straal r .

Wij vonden op pag. 79 voor het aantal bewegingswijzen, waarvoor de frequentie in het interval dp ligt en waarvoor n een bepaalde waarde heeft, waarvoor dus ook een gemeenschappelijke kritische bol is aan te wijzen,

$$\frac{2R}{\pi c} dp. 2n \sqrt{1 - \frac{n^2 c^2}{p^2 R^2}} = \frac{2R}{\pi c} dp. 2n \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}}. \quad (120)$$

Nemen wij de hoeveelheid energie, die wegens het theorema der aequipartitie aan elken graad van vrijheid beantwoordt, als eenheid aan, dan geeft de uitdrukking (120) de energie, die binnen den geleider tengevolge van den beschouwdan bewegingstoestand aanwezig is.

Een zekere fractie daarvan, bepaald door (119), is binnen den bol met straal r te vinden, zoodat voor de energie binnen dien bol gevonden wordt

$$\frac{2r}{\pi c} dp. 2n \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} = \frac{2r}{\pi c} dp. 2n \sqrt{1 - \frac{n^2}{\mu^2 r^2}}.$$

Om de totale energie binnen den beschouwden bol te vinden, moet deze uitdrukking gesommeerd worden over alle waarden van n , die mogelijk zijn.

Daar $n = \mu r_0$ is en $r_0 < r$ moet zijn, kan n variëeren van 0 tot μr .

Wij mogen de som weer vervangen door een integraal en vinden ten slotte

$$\frac{2r}{\pi c} dp \int_0^{\mu r} 2n \sqrt{1 - \frac{n^2}{\mu^2 r^2}} dn = \frac{4}{3} \frac{r^3}{\pi c^2} p^2 dp.$$

Daar deze uitdrukking evenredig is met r^3 en de energie dus evenredig is met den inhoud der beschouwde ruimte, is hiermede aangetoond, dat het stralingsveld binnen den bolvormige geleider isotroop is.

§ 4.

Ten einde den toestand, die tengevolge van de straling binnen den bol bestaat, nog nader te beschrijven, kunnen wij het een en ander opmerken over het krachtenveld, dat binnen den geleider aanwezig is.

Beschouwen wij hiertoe een oplossing met bepaalde frequentie gegeven door verg. (85), dan is van dezen bewegingstoestand het volgende te zeggen:

1°. De magnetische kracht is overal gericht volgens het oppervlak van een bol, concentrisch met den geleider.

De magnetische krachtlijnen vallen samen met de lijnen $Y_n = \text{const.}$, die men op de verschillende concentrische boloppervlakken getrokken kan denken.

Waar twee takken van een dezer krommen elkaar snijden, verdwijnt de magnetische kracht.

2°. De elektrische kracht heeft een ontbondene \mathbf{d}_1 , welke volgens den straal gericht is en een ontbondene \mathbf{d}_2 volgens het boloppervlak en wel loodrecht op de kromme $Y_n = \text{const.}$

De laatste verdwijnt in de punten waar twee takken der kromme $Y_n = \text{const.}$ elkaar snijden, zoodat de elektrische kracht in die

punten radiaal gericht is en de voerstralen, die deze punten op de verschillende boloppervlakken verbinden, tot de electriche krachtlijnen behooren.

De electriche kracht is tangentiëel gericht in de punten van de kromme $Y_n = 0$.

Waar dus twee takken van deze kromme elkaar snijden, is zoowel de electriche als de magnetische kracht nul, zoodat de voerstralen die deze punten op de verschillende bollen verbinden, knooppunten genoemd kunnen worden.

Wat hier gezegd is voor de oplossingen van het eerste type, geldt met verwisseling van de electriche en de magnetische kracht voor die van het tweede type, welke door verg. (86) gegeven zijn.

Wij hebben in het bovenstaande beschouwd, hoe de electriche en de magnetische kracht veranderen over een bepaald boloppervlak. Daar de vergelijkingen $f(r)$ bevatten, zullen er ook geheele boloppervlakken zijn, waarvoor de electriche of de magnetische kracht verdwijnt.

Wat de toestanden van het eerste type betreft, merken wij op, dat de magnetische kracht en de radiaal gerichte component \mathbf{d}_1 der electriche kracht verdwijnen voor die waarden van r (wij duiden ze met r^I aan), waarvoor

$$f(r) = 0$$

is en dat de component \mathbf{d}_2 nul wordt voor de waarden van r (r^{II}), die voldoen aan de voorwaarde

$$\frac{d [r f(r)]}{dr} = 0.$$

Daarentegen zijn bij het tweede type \mathbf{d} en \mathbf{h}_1 nul voor de waarden r^I , terwijl voor de waarden r^{II} $\mathbf{h}_2 = 0$ is.

Uit de beschouwingen van pag. 77 volgt, dat de waarden r^I en r^{II} met elkaar afwisselen. Het verdient overigens de aandacht, dat de waarden r^I en r^{II} voor de beide typen niet dezelfde zijn, immers in het eene geval moet de straal van het geleidend omhulsel tot de waarden r^{II} en in het andere geval tot de waarden r^I behooren.

Ten einde de hier ter sprake gekomen waarden r^I en r^{II} nog iets nader aan te geven, merken wij op, dat bij bepaalde waarden van n de Besselsche functie $J_n(\varrho)$, die door verg. (71) bepaald wordt, voor bepaalde waarden van ϱ , bijv. $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \dots$ verdwijnt, zoodat dit ook het geval is voor de waarden

$$\frac{c}{p} \varrho_1, \frac{c}{p} \varrho_2, \frac{c}{p} \varrho_3 \dots \text{ van } r.$$

Is nu bij een toestand van het tweede type

$$\frac{c}{p} \varrho_k = R,$$

dan zijn de andere waarden

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_k} R, \frac{\varrho_2}{\varrho_k} R, \frac{\varrho_3}{\varrho_k} R \dots$$

In aansluiting aan het vroeger gezegde kan hier nog aan worden toegevoegd, dat alle boloppervlakken (met de stralen r^I en r^{II}), waarvoor op de boven aangegeven wijze bepaalde componenten van \mathbf{d} en \mathbf{h} verdwijnen, buiten den kritischen bol liggen.

HOOFDSTUK III.

Eenige andere vraagstukken.

§ 1.

In de vorige hoofdstukken heeft het theorema der aequipartitie ons de energie tengevolge van de warmtestraling binnen het parallelepipedum en den bol doen kennen.

Daar de energiedichtheid alleen van de absolute temperatuur T en van de golflengte λ afhangt, moest de gevonden waarde der energie evenredig met het volume der begrensde ruimte en onafhankelijk van den vorm der begrenzing zijn, wat voor beide beschouwde ruimten ook gebleken is waar te zijn.

Hieruit volgt voor de vergelijking

$$\Delta u + \mu^2 u = 0,$$

waaraan de ontbondenen van \mathbf{d} en \mathbf{h} voldoen, wanneer μ in de plaats van $\frac{P}{c}$ staat, de volgende mathematische stelling:

„Moet aan de grenzen van een gegeven ruimte

$$\bar{u} = 0 \text{ of } \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

zijn, dan kan aan de vergelijking

$$\Delta u + \mu^2 u = 0$$

slechts bij bepaalde waarden van μ voldaan worden. Bepaalt men zich nu tot waarden van μ , die zeer groot zijn in vergelijking met de omgekeerde waarden van de afmetingen der ruimte, dan is het aantal der waarden die μ tusschen twee gegeven grenzen kan hebben, evenredig met den inhoud der begrensde ruimte.”

Het is te verwachten, dat deze stelling ook zal gelden, wanneer

u alleen van x en y afhangt en de begrensde ruimte dus een vlakke figuur is.

§ 2

Als voorbeeld van dit laatste beschouwen wij de trillingen van een rechthoekig gespannen vlies met vaste begrenzing.

Is u de uitwijking van een deeltje uit den evenwichtsstand, welke evenredig is met e^{ipt} , dan voldoet u aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu^2 u = 0$$

met de grensvoorwaarde

$$\bar{u} = 0,$$

terwijl $\mu = \frac{p}{c}$, als c de voortplantingssnelheid der trillingen is.

Zijn verder de lengten der zijden van den rechthoek a en b , dan is de oplossing der differentiaalvergelijking en grensvoorwaarde

$$u = A e^{ipt} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b},$$

waarbij

$$p = \frac{\pi c}{a b} \sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2}$$

is en m en n positieve geheele getallen zijn.

Het aantal oplossingen met frequentie tusschen p en $p + dp$ kunnen wij vinden door het aantal punten te berekenen, die tusschen twee cirkelkwadranten met stralen $\frac{ab}{\pi c} p$ en $\frac{ab}{\pi c} (p + dp)$ liggen en waarvan de coördinaten veelvouden zijn van a en b .

Als p zeer groot is, bedraagt dit aantal

$$\frac{ab}{2\pi c^2} p dp,$$

welk aantal inderdaad evenredig is met het oppervlak van den rechthoek.

§ 3.

Beschouwen wij in de tweede plaats de trillingen van een cirkelvormig gespannen vlies met vaste begrenzing, dan ligt het

voor de hand de differentiaalvergelijking

$$\Delta u + \mu^2 u = 0$$

te transformeeren in vlakke poolcoördinaten. Zij wordt dan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{p^2}{c^2} u = 0. \quad (121)$$

Ontwikkelen wij u volgens het theorema van FOURIER in de reeks

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

waarbij u_n van den vorm

$$A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

is, dan voldoet u_n aan de vergelijking

$$\frac{d^2 u_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d u_n}{dr} + \left(\frac{p^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) u_n = 0.$$

Dit is de differentiaalvergelijking voor de Besselsche functie's van de n^e orde, zoodat als bijzondere oplossingen voor u_n gevonden worden

$$u_n = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \mathcal{J}_n \left(\frac{p}{c} r \right).$$

Is nu a de straal van den cirkel, die het vlies begrenst, dan is de grensvoorwaarde, die de mogelijke frequentie's leert kennen

$$\mathcal{J}_n \left(\frac{p}{c} a \right) = 0.$$

Stellen wij

$$\frac{a}{c} p = \varrho \text{ en } \frac{a}{c} dp = d\varrho,$$

dan komt het vraagstuk neer op de bepaling van het aantal wortels der vergelijking

$$\mathcal{J}_n(\varrho) = 0$$

tusschen de grenzen ϱ en $\varrho + d\varrho$.

Wij kunnen nu weer gebruik maken van de formules van NICHOLSON (zie pag. 72) voor Besselsche functie's, welke ook gelden voor het geval, dat n een geheel getal is. Aan de grens-

voorwaarde zal ook hier alleen door de formule A voldaan kunnen worden, zoodat alleen die bewegingstoestanden mogelijk zijn, waarvoor $\frac{p}{c} r > n$ is, en dus, analoog aan den kritischen bol in het vorige hoofdstuk, hier voor elke oplossing een kritische cirkel is aan te wijzen, waarvan de straal bepaald wordt door

$$r = \frac{c}{p} n.$$

Voor mogelijke bewegingstoestanden moet de kritische cirkel binnen het cirkelvormig vlies liggen, terwijl voor de hoogere trillingstoestanden de energie buiten den kritischen cirkel te vinden is.

Wij maken dus gebruik van de formule

$$\mathcal{J}_n(\varrho) = \left(\frac{2K}{\pi\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \sigma,$$

zoodat de grensvoorwaarde eischt, dat aan den rand van het vlies

$$\sin \sigma = 0$$

is en dat dus σ een veelvoud van π is.

Daar

$$d\sigma = \sqrt{1 - \frac{n^2}{\varrho^2}} d\varrho$$

is, vinden wij voor het gezochte aantal wortels

$$\sqrt{1 - \frac{n^2}{\varrho^2}} \frac{d\varrho}{\pi}.$$

Iedere wortel ϱ geeft twee bewegingswijzen aan, waarvan de eene $\cos n\varphi$, de andere $\sin n\varphi$ bevat, terwijl bovendien aan n alle geheele waarden van 0 tot ϱ gegeven moeten worden.

Het totaal aantal bewegingswijzen is dus

$$\frac{2 d\varrho}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\varrho} \sqrt{1 - \frac{n^2}{\varrho^2}}$$

of, daar wij de som weer door een integraal mogen vervangen,

$$2 \frac{d\varrho}{\pi} \int_0^{\varrho} \sqrt{1 - \frac{n^2}{\varrho^2}} dn = \frac{1}{2} \varrho d\varrho.$$

Ten slotte vinden wij dus voor het aantal bewegingstoestanden, waarvoor de frequentie in het interval dp ligt,

$$\frac{a^2}{2 c^2} p dp. \quad (122)$$

Schrijven wij hiervoor

$$\frac{\pi a^2}{2 \pi c^2} p dp,$$

dan blijkt, dat dit aantal evenredig is met het oppervlak der begrensde ruimte en overeenkomt met hetgeen voor het rechthoekig vlies gevonden is.

§ 3.

Ten laatste beschouwen wij de trillingen van een gasmassa binnen een cilinder met volkomen vaste wanden.

Wij bepalen ons hier tot toestanden met een snelheidspotential u en transformeeren de vergelijking

$$\Delta u + \mu^2 u = 0,$$

waaraan deze voldoet, in cilindercoördinaten, zoodat zij overgaat in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{p^2}{c^2} u = 0.$$

De grensvoorwaarde is hier

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

als n de normaal aan den wand is.

Om daaraan voor de vlakken $z = 0$ en $z = h$ (waarbij h de hoogte van den cilinder voorstelt) te kunnen voldoen, ontwikkelen wij u in een reeks van FOURIER en stellen dus

$$u = F_0 + F_1 \cos \frac{\pi z}{h} + \dots + F_m \cos \frac{m \pi z}{h} + \dots$$

F_m is hierin een functie van φ en r en voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 F_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_m}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{p^2}{c^2} - \frac{m^2 \pi^2}{h^2} \right) F_m = 0, \quad (123)$$

of, wanneer wij

$$p'^2 = p^2 - \frac{m^2 \pi^2 c^2}{h^2} \quad (124)$$

stellen,

$$\frac{\partial^2 F_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_m}{\partial \varphi^2} + \frac{p'^2}{c^2} F_m = 0. \quad (125)$$

Nadere beschouwing leert, dat alleen wanneer p'^2 positief is, dus voor

$$m < \frac{hp}{\pi c}, \quad (126)$$

aan de grensvoorwaarde aan het cilinderoppervlak voldaan kan worden.

De veronderstelling

$$m > \frac{hp}{\pi c}$$

zou ons tot oplossingen voeren, die eenige overeenkomst hebben met de op pag. 74 beschouwde exponentiële oplossingen, (wanneer deze zich n.l. tot aan de grenzen van het beschouwde gebied uitstrekten).

Om nu het aantal mogelijke bewegingswijzen te vinden, kennen wij eerst aan m een bepaalde waarde toe en laten p veranderen tusschen p en $p + dp$, terwijl de overeenkomstige grenzen van p' zijn p' en $p' + dp'$.

Daar verg. (125) volkomen overeenstemt met verg. (121) voor den bewegingstoestand van het cirkelvormig gespannen vlies, kunnen wij de daar gevonden uitkomst (122) overnemen, zoodat wij voor het aantal oplossingen vinden

$$\frac{a^2}{2c^2} p' dp',$$

waarin a den straal van de cirkelvormige doorsnede van den cilinder voorstelt.

Uit verg. (124) volgt echter

$$p' dp' = p dp,$$

dus is het gezochte aantal

$$\frac{a^2}{2 c^2} p dp.$$

Daar dit onafhankelijk is van de waarde van m , en er

$$\frac{h p}{\pi c}$$

waarden zijn, die aan verg. (126) voldoen, is ten slotte het aantal bewegingstoestanden

$$\frac{h a^2}{2 \pi c^3} p^2 dp.$$

Ook dit aantal is evenredig met den inhoud der begrensde ruimte.

§ 4.

Hiermede is de genoemde mathematische stelling omtrent het aantal oplossingen der vergelijking $\Delta u + \mu^2 u = 0$ voor een aantal zeer bijzondere gevallen aangetoond.

Het bewijs voor een geheel willekeurige ruimte te geven, is mij niet mogelijk geweest ¹⁾.

Tot slot kan gewezen worden op een gevolgtrekking, waartoe de stelling leidt, als zij wordt toegepast op gelijkvormige figuren.

Beschouwen wij hiertoe eerst twee gelijkvormige vlakke figuren.

Laat voor het eerste oppervlak het aantal oplossingen der vergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu^2 u = 0 \tag{127}$$

met de grensvoorwaarde

¹⁾ Ondertusschen heeft WEYL met behulp van de theorie der integraal-vergelijkingen een algemeene behandeling van het vraagstuk gegeven. H. WEYL, Ueber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, Göttinger Nachrichten 1911, 2, p. 110.

$$\bar{u} = 0$$

tusschen de grenzen μ en $\mu + d\mu$ worden voorgesteld door

$$\varphi(\mu) d\mu.$$

Laat de lineaire afmetingen van het tweede oppervlak C maal zoo groot zijn als van het eerste en laat voor dit oppervlak het aantal oplossingen tusschen dezelfde grenzen worden voorgesteld door

$$\varphi'(\mu) d\mu,$$

dan volgt uit de besproken stelling, dat

$$\varphi'(\mu) d\mu = C^2 \varphi(\mu) d\mu. \quad (128)$$

Voeren wij voor het tweede oppervlak de transformatie

$$x' = \frac{x}{C}$$

$$y' = \frac{y}{C}$$

$$\mu' = C\mu \quad (129)$$

uit, dan geldt voor dit oppervlak de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \mu'^2 u = 0$$

met de grensvoorwaarde

$$\bar{u} = 0.$$

Deze vergelijking heeft dezelfde gedaante als verg. (127) en klaarblijkelijk hebben aan den rand van het tweede oppervlak x' en y' dezelfde waarden als x en y aan den rand van het eerste. Indien dus bij het eene oppervlak voldaan kan worden aan de vergelijking en de grensvoorwaarde bij een zekere waarde van μ , dan kan er bij het tweede oppervlak aan voldaan worden bij dezelfde waarde van μ' , dus volgens (129) bij een C maal zoo kleine waarde van μ .

(Dit is niets anders dan bijv. de stelling, dat bij twee gelijk-, vormige vliezen bij gelijke massa per vlakte-eenheid en gelijke spanning gelijkvormige toestanden kunnen bestaan, waarbij de frequentie's omgekeerd evenredig met de afmetingen zijn.)

De waarden van μ , die bij het tweede oppervlak voorkomen, zijn dus alle C maal zoo klein als die, welke bij het eerste behooren.

Evenveel waarden als er bij het tweede tusschen μ en $\mu + d\mu$ liggen, vindt men dus bij het eerste tusschen $C\mu$ en $C(\mu + d\mu)$, zoodat

$$\varphi'(\mu) d\mu = C \varphi(C\mu) d\mu.$$

Nemen wij verg. (128) in aanmerking, dan volgt hieruit

$$C^2 \varphi(\mu) d\mu = C \varphi(C\mu) d\mu,$$

dus

$$\varphi(C\mu) = C \varphi(\mu).$$

De besproken stelling voert dus tot een eenvoudige eigenschap van de „oplossingsfrequentie” $\varphi(\mu)$.

Het blijkt n.l. dat deze voor vlakke figuren evenredig is met μ , dus met de frequentie der trillingen, terwijl, door een dergelijke beschouwing als nu voor vlakke figuren gehouden is, op twee gelijkvormige ruimtefiguren toe te passen, gemakkelijk is in te zien, dat voor ruimtefiguren $\varphi(\mu)$ evenredig moet zijn met μ^2 .

Dit is voor de beschouwde vlakke figuren, n.l. den rechthoek en den cirkel en voor de beschouwde ruimtefiguren, n.l. het parallelepipedum, den bol en den cilinder, gebleken juist te zijn.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or introductory paragraph.

STELLINGEN

Faint, illegible text in the middle section of the page, likely the main body of the document.

Faint, illegible text at the bottom of the page, possibly a conclusion or footer.

STELLINGEN.

1. De beschouwingen van WILHELM VON BEZOLD over het afkoelen van stijgende en het warmer worden van dalende lucht-massa's zijn onjuist. (Zur Thermodynamik der Atmosphäre, Berliner Sitzungsber., 1888, pag. 487—489).
2. Voor de bepaling van capillariteitsconstanten verdient de methode van CANTOR-FEUSTEL de voorkeur. (Ann. d. Phys. u. Chem., 47, pag. 399, 1892; Ann. d. Phys. 16, pag. 61, 1905).
3. Ten onrechte beweert A. SCHUSTER, dat de aswenteling der aarde de oorzaak kan zijn van electromotorische krachten in de atmosfeer. (Proc. Royal Society, March, 1911).
4. De beschouwingen van C. V. BURTON over de waargenomen verduisteringen van den satelliet I van Jupiter kunnen niet leiden tot de kennis van de snelheid der zon t. o. z. van den aether. (Phil. Mag. 1910, pag. 417).
5. De verklaring, die A. KAPTEYN geeft van het zweven der vogels, is onaannemelijk. (De Ingenieur, 1909, pag. 400).
6. Het bestaan van de z. g. n. „isothermische sfeer” in den dampkring kan worden verklaard uit de warmtestraling. (HUMPHREYS, Astrophys. Journ. 29).

7. Ten onrechte schrijft W. WILSON de exponentiële absorptiewet, door verschillende onderzoekers voor de β -straling van sommige radioactieve preparaten gevonden, toe aan een bijzondere distributie van de snelheden der onderzochte stralen. (W. WILSON, Proc. Royal Society, A 82, pag. 612; A 84, pag. 141).

8. Uit het negatieve resultaat, bij het onderzoek naar de radioactiviteit der zware metalen verkregen, mag men niet besluiten, dat radioactiviteit geen algemeene eigenschap der stof is. Uit theoretische overwegingen is het zeer aannemelijk, dat dit wel het geval is. (CAMPBELL, Jahrb. der Radioaktivität u. Elektronik, 2, pag. 434; WRIGHT, Phil. Mag. [6]. 17, pag. 295, MAC LENNAN, Phil. Mag. [6] 14, pag. 760).

9. Het is onwaarschijnlijk, dat de lijn $557 \mu\mu$ van het spectrum van het Noorderlicht toe te schrijven is aan krypton of argon. (WEGENER, Phys. Zeitschr. 12, pag. 214, 1911).

10. Terecht zegt PLANCK, dat het exacter en eenvoudiger zou zijn, om inplaats van de effectieve temperatuur der zon, te spreken over de gemiddelde temperatuur der zonnestrallen. (Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, pag. 96).

11. Voor een k -dimensionale uitgebreidheid zal het aantal oplossingen van de vergelijking $\Delta u + \mu^2 u = 0$ met de grensvoorwaarde $u = 0$, waarvoor μ ligt tusschen μ en $\mu + d\mu$, wanneer men zich beperkt tot waarden van μ , die groot zijn in verhouding tot de omgekeerde waarden van de afmetingen der beschouwde ruimte, evenredig zijn met de k^{de} macht van haar afmetingen. Het interval $d\mu$ moet hierbij klein zijn t. o. z. van μ , doch vele oplossingen bevatten.

12. Het door SALMON in zijne „Vorlesungen über die Algebra

der linearen Transformationen" gegeven bewijs, dat twee homogene vergelijkingen tusschen drie veranderlijken van den m^{den} en n^{den} graad mn wortels toelaten, is onvolledig.

13. Het bewijs, dat E. T. WHITTAKER in zijn „Course of Modern Analysis" geeft van de integraalstelling van Cauchy is onvoldoende.

der linearen Transformationen, gegeben beweis, dat twee homo-
gene vermenigvuldigen, twee vermenigvuldigen van denzelfden
graad, altijd een wettelijk resultaat is onvolledig.

13. Het bewijs, dat E. T. Whittaker in zijn "Course of
Modern Analysis" geeft van de integratie van Cauchy's
vergelijking.

Deze vergelijking kan in latere werken worden gevonden, en
het is een zeer belangrijke vergelijking, die in de
theorie der differentiaalvergelijkingen een belangrijke rol
speelt. Het is een vergelijking van de tweede orde, die
in de theorie der functies van een complexe veranderlijke
een belangrijke plaats inneemt.

Deze vergelijking kan ook in de theorie der
differentiaalvergelijkingen worden gevonden, en het is
een belangrijke vergelijking, die in de theorie der
functies van een complexe veranderlijke een belangrijke
plaats inneemt.

Deze vergelijking kan ook in de theorie der
differentiaalvergelijkingen worden gevonden, en het is
een belangrijke vergelijking, die in de theorie der
functies van een complexe veranderlijke een belangrijke
plaats inneemt.

Deze vergelijking kan ook in de theorie der
differentiaalvergelijkingen worden gevonden, en het is
een belangrijke vergelijking, die in de theorie der
functies van een complexe veranderlijke een belangrijke
plaats inneemt.

Deze vergelijking kan ook in de theorie der
differentiaalvergelijkingen worden gevonden, en het is
een belangrijke vergelijking, die in de theorie der
functies van een complexe veranderlijke een belangrijke
plaats inneemt.

