

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

SUR LES

MOUVEMENTS QUI SE PRODUISENT DANS UNE MASSE GAZEUSE,

SOUS L'INFLUENCE DE LA PESANTEUR, à LA SUITE DE DIFFÉRENCES
DE TEMPÉRATURE,

PAR

H. A. LORENTZ.

§ 1. Dans un Mémoire antérieur ¹⁾, j'ai déduit des principes fondamentaux de la théorie cinétique des gaz les équations du mouvement des corps gazeux. Parmi les problèmes auxquels ces équations peuvent être appliquées, il y en a un qui tout d'abord avait spécialement attiré mon attention, celui des courants produits par une inégale distribution de température et de l'influence que ces mouvements exercent sur la transmission de la chaleur entre des corps de températures différentes.

Les physiciens qui se sont occupés de la détermination expérimentale du coefficient de conductibilité calorifique des gaz ont reconnu que, lorsque la tension de ceux-ci atteint une atmosphère,

¹⁾ Lorentz: Les équations du mouvement des gaz et la propagation du son suivant la théorie cinétique des gaz (*Arch. néerl.*, t. XVI).

ou reste peu au-dessous, l'influence en question est très considérable; pour la rendre inoffensive, ils ont dû avoir recours à la raréfaction des gaz. Or j'espérais que, en soumettant au calcul les courants déterminés par la chaleur, on pourrait employer aussi les expériences faites pour des densités supérieures dans la détermination du coefficient de conductibilité; ces expériences conduiraient alors, en outre, à la connaissance du coefficient du frottement interne, attendu que celui-ci doit évidemment influencer sur l'intensité des courants qui se produisent dans le gaz.

J'avais commencé cette étude, quand parut sur le même sujet un mémoire de M. Oberbeck ¹⁾, et tout récemment un calcul a été exécuté dans le même dessein par M. L. Lorenz ²⁾. Ni l'un ni l'autre de ces deux physiciens n'a toutefois résolu complètement le problème. La quantité de chaleur transmise par les courants est trouvée par M. Oberbeck sous la forme d'une série, dont le premier terme est proportionnel au cube de la différence de température, tandis que les termes suivants en contiennent des puissances encore plus élevées. Or, un examen sommaire des résultats des expériences de MM. Kundt et Warburg ³⁾ et de celles de M. Winkelmann ⁴⁾ suffit à montrer que la partie de la chaleur transmise, qui dépend des courants, ne peut pas renfermer de terme proportionnel au cube de la différence de température; aussi M. Oberbeck pense-t-il que, pour des densités qui ne sont pas très petites, la série établie par lui divergera et ne pourra par conséquent représenter la réalité.

Le résultat auquel arrive M. Lorenz est mieux en harmonie avec les faits. Il traite le cas particulier des courants produits le long d'une plaque verticale chauffée, et il trouve pour la vitesse de refroidissement une expression dans laquelle la différence de température est affectée de l'exposant $\frac{5}{4}$, ce qui est

¹⁾ Oberbeck, *Wied. Ann.*, t. VII, p. 271.

²⁾ Lorenz, *Wied. Ann.*, t. XIII, p. 583.

³⁾ Kundt u. Warburg, *Wied. Ann.*, t. CLVI, p. 177.

⁴⁾ Winkelmann, *Wied. Ann.*, t. CLVI, p. 497.

en accord satisfaisant avec le résultat des expériences de Dulong et Petit. Celles de MM. Kundt et Warburg et de M. Winkelmann ne contredisent pas non plus l'hypothèse que la vitesse de refroidissement, — en tant qu'elle dépend des mouvements du gaz, — est proportionnelle à une pareille puissance de la différence de température. Toutefois, un examen spécial sera nécessaire avant que le résultat obtenu par M. Lorenz puisse être appliqué à d'autres cas.

Moi non plus je n'ai pas réussi à résoudre le problème, et l'espoir que j'avais en entreprenant le calcul ne s'est pas réalisé. Néanmoins, je crois opportun de communiquer mes considérations, bien qu'elles ne doivent être regardées que comme une préparation à un traitement plus complet de la question.

§ 2. Les équations du mouvement des gaz, sous leur forme générale, sont assez compliquées. Aussi se borne-t-on généralement, par exemple dans l'étude des phénomènes du son, aux dérangements infiniment petits de l'état d'équilibre. De la même manière, dans le problème qui nous occupe ici, les différences de température et les courants qui en résultent peuvent d'abord être supposés infiniment petits, ce qui fait disparaître différents termes dans les équations du mouvement. Même alors, on trouve encore quelque influence des courants sur la transmission de la chaleur. Il est vrai que la convection proprement dite de la chaleur disparaît, comme quantité du second ordre, mais les courants donnent pourtant lieu à une modification dans la forme des surfaces isothermes et par conséquent aussi dans la quantité de chaleur transmise par conductibilité. Le calcul montre toutefois que, dans des expériences telles que celles de MM. Kundt et Warburg, cette modification est très légère et absolument incapable d'expliquer l'influence qu'ils ont reconnue aux courants. Il ne sera donc plus permis, dans ces expériences, de regarder les différences de température comme infiniment petites. Effectivement, on trouve que déjà pour de petites différences, de quelques degrés par exemple, différents termes, qui d'abord avaient été négligés dans les équations du mouvement, devien-

nent égaux ou supérieurs à ceux qu'on avait conservés. La considération des équations du mouvement apprend en effet que, du moment où il faut tenir compte du frottement interne et de la conductibilité thermique des gaz, de petites vitesses, par exemple de 1 mm. par seconde, ne peuvent plus être traitées comme infiniment petites. Or si l'on a recours aux équations obtenues pour un dérangement infiniment petit de l'état d'équilibre, pour apprécier les vitesses qui se produisent dans les courants dus à la chaleur, on reconnaît que, même en cas de très faibles différences de température, ces vitesses sont déjà beaucoup trop grandes pour qu'on puisse les regarder comme infiniment petites.

A la page 12 du Mémoire ci-dessus cité, les équations du mouvement des gaz ont d'abord été établies sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (Nu)}{\partial x} + \frac{\partial (Nv)}{\partial y} + \frac{\partial (Nw)}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} &= 0, \dots\dots\dots (a_1) \\ - N \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{x,z}}{\partial z} + \frac{\partial (Nu)}{\partial t} &= 0, \\ - N \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_{y,z}}{\partial z} + \frac{\partial (Nv)}{\partial t} &= 0, \\ - N \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial Q_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial (Nw)}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \left. \dots\dots (b_1) \right\}$$

$$\begin{aligned} - m N \left(u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \\ + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} &= 0 \dots\dots\dots (c_1) \end{aligned}$$

Dans ces équations, x, y, z représentent les coordonnées d'un point dans l'espace, t le temps, $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$ les accélé-

rations qu'une molécule acquiert par l'action des forces extérieures, m la masse d'une molécule, tandis que $N, u, v, w, P_x, P_y, P_z, Q_{x,y}, Q_{y,z}, Q_{x,z}, R, S_x, S_y, S_z$ sont des quantités qui dépendent de l'état du gaz au point (x, y, z) et au temps t . Si l'on considère un élément de volume $d\tau$, le nombre des molécules qui y sont contenues est $N d\tau$, de sorte que N est le nombre des molécules par unité de volume. Désignons encore par (ξ, η, ζ) la vitesse avec laquelle se meut le centre de gravité d'une molécule, et par E' l'énergie de cette molécule (c'est-à-dire la somme de l'énergie du mouvement de translation et de l'énergie interne); nous avons alors, en prenant les sommes pour toutes les molécules contenues dans $d\tau$:

$$\sum \xi = Nu d\tau, \quad \sum \eta = Nv d\tau, \quad \sum \zeta = Nw d\tau,$$

$$\sum \xi^2 = P_x d\tau, \quad \sum \eta^2 = P_y d\tau, \quad \sum \zeta^2 = P_z d\tau,$$

$$\sum \xi\eta = Q_{x,y} d\tau, \quad \sum \eta\zeta = Q_{y,z} d\tau, \quad \sum \zeta\xi = Q_{z,x} d\tau,$$

$$\sum E' = R d\tau,$$

$$\sum \xi E = S_x d\tau, \quad \sum \eta E = S_y d\tau, \quad \sum \zeta E = S_z d\tau.$$

Remarquons que u, v, w sont les vitesses, dans la direction des axes des coordonnées, que l'élément $d\tau$ paraît posséder dans son ensemble, les vitesses hydrodynamiques du gaz, et que R représente l'énergie par unité de volume. Les quantités $P_x, P_y, P_z, Q_{x,y}, Q_{y,z}, Q_{x,z}$ sont en rapport avec les différences entre les quantités de mouvement qui sont transmises dans les deux sens, à travers des plans perpendiculaires aux axes des coordonnées, en vertu du mouvement des molécules; de même, les quantités S_x, S_y, S_z représentent l'énergie transmise par de pareils plans.

En ce qui concerne les équations du mouvement elles-mêmes, la première, celle de la continuité, exprime comment le nombre des molécules contenues dans un élément de volume $d\tau$ varie à raison de l'entrée et de la sortie de molécules par les faces latérales. La première des équations (b_1) détermine, d'une

manière analogue, la variation de la quantité de mouvement dans la direction de l'axe des x pour les molécules qui se trouvent à l'intérieur de $d\tau$. Cette variation est représentée par le terme $\frac{\partial (N u)}{\partial t}$ (multiplié par $m d\tau$) et elle est due en partie à

l'action des forces extérieures (le terme $-N \frac{\partial \psi}{\partial x}$), en partie à l'entrée et à la sortie de molécules par les faces latérales de l'élément (d'où proviennent les termes $\frac{\partial P_x}{\partial x}, \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial y}, \frac{\partial Q_{x,z}}{\partial z}$).

Les autres équations (b_1) ont, naturellement, une signification analogue. Enfin, (c_1) exprime comment l'énergie à l'intérieur de l'élément $d\tau$ varie avec le temps ($\frac{\partial R}{\partial t}$), en partie par l'action des forces extérieures (le premier terme), en partie par l'entrée et la sortie de molécules à travers les faces latérales (les termes $\frac{\partial S_x}{\partial x}, \frac{\partial S_y}{\partial y}, \frac{\partial S_z}{\partial z}$).

Les équations prennent une forme plus commode lorsque, après avoir multiplié (a_1) et (b_1) par m , on introduit la densité $m N = \rho$. Si, en outre, les produits de P_x , etc. par m sont représentés par les petites lettres correspondantes, on obtient:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (A_1)$$

$$\left. \begin{aligned} -\rho \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial q_{x,y}}{\partial y} + \frac{\partial q_{x,z}}{\partial z} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} &= 0, \\ -\rho \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial q_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial q_{y,z}}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} &= 0, \\ -\rho \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial q_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial q_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots (B_1)$$

$$- \varrho \left(u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (C_1)$$

§ 4. A elles seules, toutefois, ces équations ne suffisent pas pour la solution des problèmes sur le mouvement des gaz; on doit les combiner, à cet effet, avec celles qui expriment p_x , etc. en fonction de la densité, de la température et de la vitesse hydrodynamique du gaz.

Désignons par h la valeur moyenne du carré de la vitesse du mouvement calorifique des molécules gazeuses, valeur qui est liée par la relation $h = e T$ (e constant) à la température absolue T ; par ϑ (h) l'énergie intramoléculaire de l'unité de masse du gaz, par μ le coefficient du frottement, par κ celui de la conductibilité calorifique (exprimé en unités de travail), par ν le troisième coefficient, dont la signification a été exposée dans mon précédent Mémoire; posons en outre, pour abréger,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = K,$$

on a alors (*Arch. néerl.*, XVI, p. 45):

$$p_x = \frac{1}{3} \varrho h + \varrho u^2 - 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu K, \text{ etc.} \dots \dots \dots (1)$$

$$q_{x,y} = \varrho u v - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \text{ etc.} \dots \dots \dots (2)$$

$$R = \frac{1}{2} \varrho (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} \varrho [h + 2 \vartheta(h)] + \nu K, \dots (3)$$

$$\begin{aligned} S_x = & \frac{1}{2} \varrho u \left[\frac{\kappa}{3} h + 2 \vartheta(h) + (u^2 + v^2 + w^2) \right] - \frac{\kappa}{e} \frac{\partial h}{\partial x} - \\ & - \mu \left[v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - \\ & - 2 \mu u \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{2}{3} \mu + \nu \right) u K, \text{ etc.} \dots \dots (4) \end{aligned}$$

§ 5. Lorsque la pesanteur agit sur le gaz, et que l'axe des z est dirigé verticalement vers le bas, on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = g.$$

Le gaz peut alors présenter un état d'équilibre, dans lequel la température est partout la même, et où, par conséquent, h aussi a partout la même valeur h_0 . On doit avoir, en ce cas,

$$\begin{aligned} p_x &= p_y = p_z = \frac{1}{3} \varrho h_0, \\ q_{x,y} &= q_{y,z} = q_{z,x} = 0, \\ R &= \frac{1}{2} \varrho [h_0 + 2 \vartheta (h_0)], \\ S_x &= S_y = S_z = 0, \end{aligned}$$

et les équations du mouvement (A_1) — (A_3) se réduisent à

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = 0, \quad -g \varrho + \frac{1}{3} h_0 \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0,$$

auxquelles, si l'on pose

$$\frac{3g}{h_0} = \varepsilon,$$

il est satisfait par

$$\varrho = D e^{\varepsilon z}, \dots \dots \dots (5)$$

où la constante D représente la densité du gaz pour $z = 0$.

§ 6. Considérons maintenant des écarts infiniment petits de cet état d'équilibre. Si l'on représente alors la densité par

$$\varrho = D e^{\varepsilon z} (1 + s),$$

et qu'on pose pour la valeur de h

$$h = h_0 (1 + k),$$

s et k , ainsi que u , v , w , sont infiniment petits.

On a alors

$$p_x = \frac{1}{3} D \dot{h}_0 e^{\varepsilon z} (1 + s + k) - 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu K, \text{ etc. } \dots (6)$$

$$q_{x,y} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \text{ etc. } \dots (7)$$

$$R = \frac{1}{2} D e^{\varepsilon z} \{ [h_0 + 2 \vartheta (h_0)] + [h_0 + 2 \vartheta (h_0)] s + h_0 [1 + 2 \vartheta' (h_0)] k \} + \nu K \dots (8)$$

$$S_x = \frac{1}{2} D e^{\varepsilon z} u \left[\frac{5}{3} h_0 + 2 \vartheta (h_0) \right] - \frac{\varkappa}{e} h_0 \frac{\partial k}{\partial x}, \text{ etc. } \dots (9)$$

où μ , ν , $\varkappa$ doivent être regardés comme des constantes.

En substituant ces valeurs dans les équations du mouvement, on obtient, si l'on introduit en outre l'hypothèse que l'état du gaz est devenu stationnaire,

$$K + \varepsilon w = 0 \dots (A_2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} D h_0 \frac{\partial}{\partial x} [e^{\varepsilon z} (s + k)] - \mu \Delta u - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial K}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{3} D h_0 \frac{\partial}{\partial y} [e^{\varepsilon z} (s + k)] - \mu \Delta v - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial K}{\partial y} &= 0, \\ \frac{1}{3} D h_0 \frac{\partial}{\partial z} [e^{\varepsilon z} (s + k)] - \mu \Delta w - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial K}{\partial z} - g D e^{\varepsilon z} s &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (B_2)$$

$$g D e^{\varepsilon z} w + \frac{\varkappa}{e} h_0 \Delta k = 0 \dots (C_2)$$

§ 7. Nous supposons le gaz entièrement compris entre deux surfaces S_1 et S_2 , et nous admettrons que les expressions du § 5 se rapportent à l'état d'équilibre du gaz lorsque les deux surfaces ont la même température T_0 , correspondant à h_0 .

Représentons-nous l'état de perturbation, dont il a été question au § 6, comme dû à ce que la surface S_1 est constamment maintenue à une température $T_0 (1 + q)$, qui diffère infiniment peu de la température primitive. Il faut alors déterminer u , v ,

w et k par les équations $(A_2) - C_2)$ et par les conditions qu'en S_1 et S_2 on ait $u = v = w = 0$ (nous admettons qu'il ne s'opère pas de glissement du gaz le long de ces surfaces), et que k devienne 0 en S_2 , mais prenne en S_1 la valeur prescrite q . Enfin, si la quantité totale de gaz est restée la même, on doit avoir

$$\iiint e^{\varepsilon z} s \, dx \, dy \, dz = 0, \dots \dots \dots (10)$$

où l'intégration doit être étendue sur tout l'espace compris entre S_1 et S_2 .

Nous démontrerons d'abord que par ces conditions le problème est complètement déterminé. Si, en effet, deux systèmes de valeurs de u , v , w , s , k étaient possibles, les différences de ces valeurs devraient également représenter un état de mouvement et dans ce dernier on devrait aussi avoir, tant en S_1 qu'en S_2 , $k = 0$. Or il est facile de prouver qu'on a alors nécessairement, partout, $u = v = w = s = k = 0$.

A cet effet, résolvons les équations (B_2) et (C_2) par rapport aux quantités Δu , Δv , Δw , Δk , multiplions par u , v , w , $\frac{\kappa h_0}{e \mu} k$, prenons la somme, puis, après avoir multiplié encore une fois par $dx \, dy \, dz$, intégrons sur tout l'espace occupé par le gaz. Il vient alors :

$$\begin{aligned} & \iiint \left[u \Delta u + v \Delta v + w \Delta w + \frac{\kappa h_0}{e \mu} k \Delta k \right] dx \, dy \, dz = \\ &= \frac{1}{3 \mu} D h_0 \iiint \left[u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right] [e^{\varepsilon z} (s + k)] dx \, dy \, dz - \\ & \quad - \frac{1}{3} \iiint \left[u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial y} + w \frac{\partial K}{\partial z} \right] dx \, dy \, dz - \\ & \quad - \frac{g D}{\mu} \iiint e^{\varepsilon z} w (s + k) dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Appliquons maintenant aux trois premières intégrales l'intégration par parties, dans laquelle les intégrales sur les surfaces

disparaissent, puisque en S_1 et S_2 on a $u = v = w = k = 0$. En ayant égard, en outre, à l'équation (A_2) , on trouve:

$$- \iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{\kappa h_0}{e \mu} \left\{ \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] dx dy dz = \frac{1}{3} \iiint K^2 dx dy dz.$$

Si l'on fait passer tous les termes de cette équation dans le second membre, celui-ci présente une somme de carrés, d'où l'on peut conclure que u , v , w , k doivent être constants et par conséquent, en vertu des conditions établies pour les surfaces, partout $= 0$. Il n'est ensuite pas difficile de déduire des équations (B_2) et (10), qu'on doit avoir aussi $s = 0$, et par là se trouve démontré que les équations $(A_2) - (C_2)$, combinées avec les conditions accessoires, n'admettent qu'une seule solution.

Quand une fois on connaît partout k et conséquemment la nouvelle distribution de température, la quantité de chaleur que le corps limité par S_1 cède au gaz dans l'unité de temps est déterminée par l'intégrale:

$$- \kappa \frac{h_0}{e} \int \frac{\partial k}{\partial n} dS_1, \dots \dots \dots (11)$$

où n représente la normale menée vers le côté du gaz.

§ 8. La solution générale des équations $(A_2) - (C_2)$ paraît difficile à trouver, même quand les surfaces S_1 et S_2 ont une forme simple.

Les variables u , v , w , k peuvent toutefois, si la densité et par conséquent aussi la quantité D sont suffisamment petites, être développées en séries suivant les puissances ascendantes de D .

Lorsque D est très petit, u , v , w tendent vers 0, et k vers la valeur k_0 , qui est déterminée par l'équation

$$\Delta k_0 = 0,$$

combinée avec les conditions accessoires. La distribution de température est alors celle qui s'établit sous la seule influence de la conductibilité calorifique.

Les séries pour u , v , w et k doivent donc avoir la forme:

$$u = u_1 D + u_2 D^2 + u_3 D^3 + \dots$$

$$k = k_0 + k_1 D + k_2 D^2 + k_3 D^3 + \dots$$

De même, nous posons:

$$s = s_0 + s_1 D + s_2 D^2 + s_3 D^3 + \dots$$

Ces expressions étant substituées dans $(A_2) - (C_2)$, on obtient, en égalant entre eux les coefficients de la même puissance de D dans les deux membres de chaque équation, une série d'équations, au moyen desquelles u_1 , u_2 , etc., k_1 , k_2 , . . . , s_0 , s_1 , . . . peuvent être déterminés.

Pour la détermination de u_1 , v_1 , w_1 , s_0 , on a d'abord

$$K_1 + \epsilon w_1 = 0 \dots \dots \dots (A_3)$$

$$\frac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial x} [e^{\epsilon z} (s_0 + k_0)] - \mu \Delta u_1 - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial K_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial y} [e^{\epsilon z} (s_0 + k_0)] - \mu \Delta v_1 - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0, \quad \left. \dots (B^3) \right\}$$

$$\frac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial z} [e^{\epsilon z} (s_0 + k_0)] - \mu \Delta w_1 - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial K_1}{\partial z} - g e^{\epsilon z} s_0 = 0,$$

où

$$K_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}$$

et où k_0 est connu. Les conditions accessoires sont, aux surfaces S_1 et S_2 ,

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0$$

et, en outre,

$$\iiint e^{\epsilon z} s_0 \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Lorsque k_0 est déjà déterminé de telle sorte que cette quantité prenne en S_1 la valeur prescrite q , les quantités k_1 , k_2 , etc. doivent, en S_1 et S_2 être égales à 0. Or, il suit de (C_2) :

$$\Delta k_1 = 0,$$

de sorte qu'on a partout

$$k_1 = 0;$$

ensuite

$$\Delta k_2 = - \frac{g e}{x h_0} e^{e z} w_1, \dots \dots \dots (C_3)$$

ce qui détermine k_2 , après qu'on a trouvé w_1 au moyen de (A_3) et de (B_3) .

§ 9. Les équations qui viennent d'être établies éprouvent encore une simplification notable si l'on admet que les dimensions de l'espace rempli de gaz est petit comparativement à $\frac{h_0}{g}$.

Cette supposition revient à dire que, lorsqu'une molécule se meut sous l'influence de l'accélération g sur une distance l du même ordre que les dimensions précitées, la vitesse acquise par elle est très petite par rapport à la vitesse moléculaire; or, dans des expériences telles que celles de MM. Kundt et Warburg ou de M. Winkelmann, cela est certainement le cas.

On peut maintenant, en premier lieu, omettre dans (A_3) le terme εw_1 . Car, w_1 disparaissant aux limites de l'espace, cette quantité est partout ailleurs du même ordre que $l \frac{\partial w_1}{\partial z}$,

et le terme lui-même est de l'ordre $l \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial z}$; or, comme $l \varepsilon$ est

très petit, et que dans K_1 se trouve le terme $\frac{\partial w_1}{\partial z}$, on peut écrire, pour (A_3) ,

$$K_1 = 0 \dots \dots \dots (12)$$

Les équations (B_3) peuvent également être simplifiées. Si

l'on pose, pour abrégé,

$$\frac{1}{3\mu} h_0 e^{\varepsilon z} (s_0 + k_0) = P, \dots \dots \dots (13)$$

on a d'abord:

$$\Delta u_1 = \frac{\partial P}{\partial x}, \Delta v_1 = \frac{\partial P}{\partial y} \dots \dots \dots (14)$$

De la dernière des équations (B_3), il résulte ensuite

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g}{\mu} e^{\varepsilon z} s_0,$$

ou, en exprimant s_0 en k_0 à l'aide de (13),

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} - \varepsilon P + \frac{g}{\mu} e^{\varepsilon z} k_0.$$

Comme les variations de εP , sur l'espace occupé par le gaz, sont de l'ordre $\varepsilon l \frac{\partial P}{\partial z}$, et que εl est très petit, on peut négliger ces variations et poser, par conséquent,

$$\varepsilon P = C, \dots \dots \dots (15)$$

C étant une constante provisoirement indéterminée. L'équation devient alors

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{g}{\mu} k_0 - C, \dots \dots \dots (16)$$

où l'on a fait, en outre, $e^{\varepsilon z} = 1$, ce qui est permis lorsqu'on choisit l'origine de façon que le plan yz coupe la masse gazeuse.

Si l'on pose $P - Cz = Q$, les équations deviennent

$$\Delta u_1 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \Delta v_1 = \frac{\partial Q}{\partial y}, \dots \dots \dots (17)$$

$$\Delta w_1 = \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{g}{\mu} k_0 \dots \dots \dots (18)$$

Il est facile de montrer que par ces équations, combinées avec (12). u_1, v_1, w_1 sont déterminés complètement et Q à une constante additive près. Q prenant ainsi la forme $Q' + C'$, où Q' est entièrement déterminé, on obtient :

$$\frac{1}{3\mu} h_0 e^{\varepsilon z} (s_0 + k_0) - Cz = Q' + C'.$$

Si par la constante C , introduite en (15), on entend la valeur de εP pour $z = 0$, on a

$$(Q')_{(z=0)} + C' = \frac{C}{\varepsilon}$$

et

$$\frac{1}{3\mu} h_0 e^{\varepsilon z} (s_0 + k_0) = Q' - Q'_{(z=0)} + \frac{C}{\varepsilon},$$

attendu que Cz peut être négligé vis-à-vis de $\frac{C}{\varepsilon}$. La constante C , enfin, est déterminée par la condition

$$\iiint e^{\varepsilon z} s_0 dx dy dz = 0.$$

Dès que u_1, v_1, w_1 sont connus au moyen de (12), (17) et (18), on trouve k_2 par l'équation (C_3) , pour laquelle on peut écrire :

$$\Delta k_2 = - \frac{g \varepsilon}{x h_0} w_1 \dots \dots \dots (19)$$

§ 10. Nous exécuterons maintenant le calcul de u_1, v_1, w_1, k_2 pour le cas où S_1 et S_2 sont des sphères concentriques, de rayons R_1 et R_2 . L'origine des coordonnées sera supposée placée au centre et $R_1 < R_2$.

D'abord, de $\Delta k_0 = 0$, combiné avec les conditions accessoires, on déduit :

$$k_0 = q \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right),$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Il n'y a maintenant qu'à chercher, n'importe par quelle voie, un système de valeurs de u_1 , v_1 , w_1 qui satisfasse à (12), (17) et (18), il étant déjà démontré que ces équations ne comportent qu'une solution unique.

Un pareil système s'obtient de la manière suivante.

Posons

$$u_1 = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial z}, \quad v_1 = \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial z}, \quad w_1 = -\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right),$$

où I est une fonction inconnue de r . L'équation (12) est alors satisfaite.

De (17), il suit

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\Delta I), \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\Delta I),$$

donc

$$Q = \frac{\partial}{\partial z} (\Delta I) + f(z),$$

où f est une fonction provisoirement inconnue.

De (18) on obtient ensuite, en substituant la valeur de k_0 ,

$$\Delta (\Delta I) = \frac{g q}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r} \right) + f''(z),$$

d'où il ressort que $f''(z)$ ne peut être qu'une constante.

On trouve donc, en réunissant les constantes,

$$\Delta (\Delta I) = \frac{g q}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left(C_1 - \frac{1}{r} \right).$$

La solution générale de cette équation est

$$I = \frac{g q}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left[\frac{1}{120} C_1 r^4 - \frac{1}{24} r^3 + C_2 r^2 + C_3 r + C_4 + \frac{C_5}{r} \right], \dots \dots \dots (20)$$

où C_2 , C_3 , C_4 , C_5 sont aussi des constantes provisoirement inconnues.

§ 11. Pour déterminer ces quantités, nous avons la condition qu'à la surface des sphères, c'est-à-dire pour $r = R_1$ et $r = R_2$, on doit avoir $u_1 = v_1 = w_1 = 0$. Or on peut exprimer les vitesses en $\frac{dI}{dr}$ et $\frac{d^2I}{dr^2}$; il est par conséquent nécessaire, mais aussi suffisant, que ces dernières quantités disparaissent pour $r = R_1$ et $r = R_2$. Cela donne quatre relations entre les constantes C_1 , C_2 , C_3 et C_5 qui figurent dans $\frac{dI}{dr}$ et $\frac{d^2I}{dr^2}$, de sorte que ces constantes peuvent précisément être déterminées. Quant à C_4 , elle reste indéterminée, mais cette quantité est sans influence sur les valeurs de u_1 , v_1 , w_1 .

Pour obtenir le résultat sous une forme simple, nous procédons de la manière suivante. Comme $\frac{dI}{dr}$ et son coefficient différentiel relativement à r doivent disparaître pour $r = R_1$ et $r = R_2$, et que $\frac{dI}{dr}$ est, d'après l'équation (20), une fonction algébrique rationnelle de r , celle-ci doit contenir le facteur $(r - R_1)^2 (r - R_2)^2$. Mais de (20) on déduit :

$$\frac{dI}{dr} = \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left[\frac{1}{30} C_1 r^3 - \frac{1}{8} r^2 + 2 C_2 r + C_3 - \frac{C_5}{r^2} \right] \dots (21)$$

Evidemment $\frac{dI}{dr}$ ne peut donc avoir que la forme

$$\frac{dI}{dr} = \frac{\eta}{r_2} (r - R_1)^2 (r - R_2)^2 (r + \vartheta) \dots (22)$$

où η et ϑ sont des constantes. Celles-ci doivent être déterminées de façon que (22) s'accorde avec (21), et pour cela il suffit que dans le développement de (21) le coefficient de r^1 devienne 0 et celui de r^2 : $-\frac{1}{8} \cdot \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$. De la première condition il résulte

$$\vartheta = \frac{R_2 R_1}{2(R_2 + R_1)},$$

et de la seconde

$$\eta = \frac{1}{4} \cdot \frac{g}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1 (R_2 + R_1)}{(4 R_2^2 + 7 R_2 R_1 + 4 R_1^2)(R_2 - R_1)} \dots (23)$$

$\frac{dI}{dr}$, et par conséquent u_1 , v_1 , w_1 , se trouvent ainsi complètement déterminés. Les résultats sont entièrement d'accord avec ceux que M. Oberbeck obtient pour les vitesses des courants, de sorte que, pour la discussion détaillée de la nature du mouvement, je puis renvoyer à son Mémoire.

§ 12. Pour déterminer k_2 , on a maintenant, d'après (19), l'équation suivante

$$\Delta k_2 = \frac{g e}{\pi h_0} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right),$$

laquelle, dès que I_1 est une fonction de r satisfaisant à l'équation

$$\Delta I_1 = I,$$

est vérifiée par

$$k_2 = \frac{g e}{\pi h_0} \left(\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} \right).$$

On peut toutefois poser aussi

$$k_2 = \frac{g e}{\pi h_0} \left[\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} + D_1(3z^2 - r^2) + D_2 \left(3 \frac{z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) + D_3 \frac{1}{r} + D_4 \right],$$

puisque les termes contenant les constantes inconnues D_1 , D_2 , D_3 , D_4 donnent 0 lorsqu'on y applique l'opération indiquée par Δ . Ces constantes peuvent alors être déterminées au moyen de la condition que, pour $r = R_1$ et $r = R_2$, k_2 doit disparaître.

§ 13. Une fois k_0 et k_2 obtenus de cette manière, on peut calculer les deux premiers termes de l'expression pour la cha-

leur perdue par S_1 dans l'unité de temps. Le premier terme est, en vertu de (11),

$$W_1 = -\frac{\pi h_0}{e} \int \frac{\partial k_0}{\partial n} dS_1 = \frac{4\pi \pi h_0 q}{e} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1},$$

et le second

$$W_2 = -\frac{\pi h_0 D^2}{e} \int \frac{\partial k_2}{\partial n} dS_1,$$

valeur pour laquelle on trouve

$$W_2 = \frac{1}{18} \pi g^2 q \cdot \frac{D^2}{\mu} \cdot \frac{R_2^2 R_1^2 (R_2 - R_1)^3}{4 R_2^2 + 7 R_2 R_1 + 4 R_1^2}.$$

Si l'on veut juger du degré d'importance de ce terme, on n'a qu'à considérer le rapport

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1}{72} \frac{g^2 D^2}{\mu \pi T_0} \cdot \frac{R_2 R_1 (R_2 - R_1)^4}{4 R_2^2 + 7 R_2 R_1 + 4 R_1^2},$$

où T_0 est la température absolue correspondant à h_0 .

§ 14. Dans un des appareils de MM. Kundt et Warburg, R_1 , le rayon de la boule du thermomètre qui se refroidissait dans une enceinte maintenue à 0° , mesurait 0,461 cm., R_2 , le rayon de l'enceinte elle-même, 2,972 cm. Calculons la valeur de $\frac{W_2}{W_1}$ pour cet appareil dans la supposition qu'à 0° il était rempli d'air ayant une tension de 760 mm. Nous avons alors, en employant le système d'unités C. G. S.,

$$D = 0,00129,$$

$$g = 981$$

et, puisque l'enceinte était maintenue à 0° ,

$$T_0 = 273.$$

On a, en outre,

$$\mu = 0,00017,$$

et quant au coefficient de la conductibilité calorifique, il peut être pris $= 0,000052$. Ce coefficient, toutefois, est exprimé en calories, tandis que dans nos formules α doit être exprimé en unités de travail. Nous avons donc à poser

$$\alpha = 0,000052 \times 42400 \times 981.$$

En substituant ces diverses valeurs, on obtient

$$\frac{W_2}{W_1} = 0,0003,$$

de sorte que dans cet appareil, pour des différences de température infiniment petites, l'influence des courants dus à la chaleur, même sous la pression d'une atmosphère, doit être insensible. Cela n'empêche pas, toutefois, que dans d'autres appareils le résultat ne puisse être tout différent. Quand R_2 est pris plus grand, $\frac{W_2}{W_1}$ devient aussi plus grand; et si la même boule de thermomètre était placée dans une enceinte sphérique d'un rayon de 30 cm., on aurait

$$\frac{W_2}{W_1} = 0,7,$$

et l'influence des courants calorifiques serait donc, même pour des différences de température infiniment petites, parfaitement appréciable.

§ 15. Il est clair maintenant que, dans des expériences telles que celles de MM. Kundt et Warburg, l'influence des courants occasionnés par la chaleur ne peut nullement être expliquée si l'on regarde la différence de température comme infiniment petite. Aussi est-il facile de montrer que les vitesses, qui prennent naissance dans ces expériences, sont beaucoup trop grandes pour qu'on puisse parler encore d'un dérangement infiniment petit de l'équilibre.

Afin de me rendre compte de la grandeur de ces vitesses, j'ai calculé, pour l'appareil dont il a été question au paragraphe

précédent, la valeur de la vitesse w , D en un point situé dans le plan horizontal passant par le centre de la boule, à une distance de 1 cm. de ce centre. En prenant, pour simplifier, $R_1 = 0,5$ et $R_2 = 3$, je trouve approximativement

$$w_1 D = 0,04 \frac{Dg}{\mu} q,$$

et par conséquent, dans le cas où l'air a (à 0°) une tension de 1 atmosphère

$$w_1 D = 300 q.$$

Pour $q = \frac{1}{100}$, valeur correspondant à une différence de température de $2^\circ,73$, cette vitesse serait de 3 cm. par seconde.

Au point choisi pour ce calcul, la vitesse est plus grande qu'en la plupart des autres points; mais on n'en peut pas moins conclure du résultat que, déjà pour des différences de température de quelques degrés, il peut se produire des vitesses dépassant 1 cm. par seconde.

§ 16. Dans les problèmes où le frottement interne et la conductibilité calorifique n'entrent pas en jeu, par exemple, lorsqu'il s'agit du mouvement du son dans un espace de grandes dimensions, on peut, sans inconvénient, regarder de pareilles vitesses comme infiniment petites. Mais cela n'est plus permis dès que, comme ici, tout dépend du frottement interne et de la conductibilité. Pour s'en assurer, on n'a qu'à comparer les termes négligés au § 6 avec ceux que nous avons conservés.

Considérons, par exemple, la quantité S_x , ayant rapport à la différence des quantités de chaleur qui passent dans les deux sens, par unité de temps, à travers un plan perpendiculaire à l'axe des x . Dans l'expression complète de S_x entrent le terme

$$\frac{1}{2} \rho u \left[\frac{5}{3} h + 2 \vartheta(h) \right],$$

relatif à la convection de la chaleur, et le terme

$$\frac{\kappa}{e} \frac{\partial h}{\partial x},$$

qui se rapporte à la conductibilité. Après avoir posé $h = h_0 (1 + k)$, nous avons négligé le terme

$$\frac{1}{2} D u. \frac{5}{3} h_0 k$$

(pour simplifier nous ne tenons pas compte de $\vartheta(h)$) et par suite la convection proprement dite; le terme

$$\frac{\kappa h_0}{e} \frac{\partial k}{\partial x},$$

au contraire, a été conservé.

Comparons ces deux termes. Si quelque part dans l'espace rempli de gaz on a $k = 0$, et que l soit une ligne du même ordre que les dimensions de cet espace, k est de l'ordre $l \frac{\partial k}{\partial x}$, et par conséquent le rapport des deux termes précités est de l'ordre

$$\frac{D u l e}{\kappa}.$$

Si l'on veut que le premier terme ne dépasse pas le dixième du second, il faudra, donc, approximativement, qu'on ait

$$u < \frac{\kappa}{10 D l e}$$

ou

$$u < \frac{\kappa T_0}{10 D l h_0}.$$

Pour l'air à la pression atmosphérique et à 0° C, cette inégalité devient, si l'on pose $l = 5$ cm.,

$$u < 0,004 \text{ cm. par sec.}$$

On voit donc que des vitesses réellement petites, inférieures de beaucoup à celles qui se produisent à la suite de différences de température de quelques degrés, ne peuvent plus être regardées comme infiniment petites.

D'après ce résultat il est très possible que, même dans le cas des vibrations sonores, provenant par exemple d'un dia-

pason, le dérangement d'équilibre ne puisse plus être supposé infiniment petit, lorsqu'on tient compte du frottement et de la conductibilité calorifique. Plus tard, j'examinerai jusqu'à quel point cette considération peut contribuer à expliquer le retard des ondes sonores dans les tuyaux étroits.

§ 17. Dès que le dérangement d'équilibre ne peut plus être regardé comme infiniment petit, la solution des problèmes sur le mouvement des gaz devient très difficile. On peut toutefois rechercher si, sans élaborer cette solution pour un cas spécial, il ne serait pas possible d'indiquer comment elle dépend de différentes circonstances.

Figurons-nous, dans un cas A , une masse gazeuse dont l'état de mouvement satisfait aux équations (A_1) , (B_1) et (C_1) , ainsi qu'aux conditions accessoires. Définissons ensuite, de la manière suivante, un second état de mouvement B , pour une autre masse gazeuse. Soient, dans cet état B , toutes les dimensions α fois plus grandes que dans A , et entendons par points correspondants, en A et B , ceux dont les coordonnées sont dans le rapport de 1 à α . De même, appelons moments correspondants, en A et B , ceux pour lesquels les temps, écoulés à partir d'un instant fixe, sont entre eux comme 1 et β .

Représentons-nous, enfin, que dans l'état B , en un point donné et à un moment donné, les vitesses u , v , w soient γ fois, le carré moyen de la vitesse moléculaire ε fois, et les quantités μ , $\frac{x}{e}$ et ν respectivement η , ϑ , ζ fois plus grandes qu'au point correspondant et au temps correspondant dans l'état A . Les quantités α , β , γ , δ , ε , η , ϑ , ζ sont des constantes, et il s'agit de savoir si on peut les déterminer de manière que le second état de mouvement soit également possible, c'est-à-dire, qu'il satisfasse aux équations du mouvement.

Or, en premier lieu, il ressort de (1) et (2) que, lorsqu'on a

$$\gamma = \sqrt{\varepsilon}$$

et

$$\alpha = \frac{\eta}{\delta \sqrt{\varepsilon}},$$

$p_x, p_y, p_z, q_x, y, q_y, z, q_z, x$ dans B sont $\delta \varepsilon$ fois plus grands que dans A .

De (3) il suit de même, que, lorsqu'on a

$$\vartheta(h) = Ch$$

(C étant pour les deux cas une même constante) et en outre

$$\zeta = \eta,$$

R est, dans B , $\delta \varepsilon$ fois plus grand que dans A .

Enfin, de (4), il résulte que, dès qu'on a

$$\vartheta = \eta,$$

S_x, S_y, S_z sont, dans B ,

$$\delta \varepsilon \sqrt{\varepsilon}$$

fois plus grands que dans A .

De la considération des équations du mouvement on peut ensuite déduire que, lorsque les accélérations dues aux forces extérieures doivent être les mêmes en B qu'en A , on doit avoir

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$$

et

$$\alpha = \varepsilon,$$

pour que l'état B satisfasse également aux équations du mouvement.

Les conditions trouvées peuvent être résumées ainsi:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \varepsilon, \quad \beta = \gamma = \sqrt{\varepsilon}, \\ \eta &= \zeta = \vartheta, \\ \delta &= \frac{\eta}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

Quand ces conditions sont remplies, les quantités de chaleur qui, dans les états A et B , passent dans l'unité de temps par des surfaces homologues, sont entre elles comme 1 à $\eta \varepsilon^2$.

§ 18. La première question est maintenant de savoir si l'on peut comparer de cette manière des expériences où le même gaz, avec des densités différentes, est introduit dans le même appareil, entre des surfaces ayant dans les deux cas la même température. On devrait avoir alors $\alpha = 1$ et $\varepsilon = 1$, donc aussi $\beta = \gamma = 1$. Or comme, à température égale, le coefficient de frottement ne change pas avec la densité, il faudrait qu'on eût de même $\eta = 1$, et alors notre dernière condition donne aussi $\delta = 1$, de sorte que l'application dont il s'agit n'est pas possible. Même en modifiant simultanément les dimensions de l'appareil, on ne peut augmenter la densité du gaz, aussi longtemps du moins que les températures doivent rester les mêmes. Car de cette dernière condition il suit $\varepsilon = 1$, ce qui exige de nouveau $\alpha = 1$ et $\delta = 1$.

Mais deux expériences dans lesquelles le même gaz, pris successivement à des températures et à des densités différentes, est introduit dans des appareils de dimensions différentes, mais de formes semblables, peuvent être comparées entre elles, pourvu que les coefficients μ , κ et ν dépendent de la même manière de la température, de sorte qu'on ait $\eta = \zeta = \vartheta$. Si alors les températures absolues dans les deux appareils sont entre elles comme 1 et ε , les dimensions dans le même rapport, et les densités comme μ et $\frac{\mu'}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}$ (μ et μ' étant les coefficients du frottement dans les deux cas), on peut, à l'aide des formules ci-dessus communiquées, déduire les vitesses hydrodynamiques et la quantité de chaleur transmise dans l'un des deux cas, des valeurs qu'elles ont dans l'autre.

On peut aussi comparer des expériences où, dans des appareils différents, sont employés des gaz différents qui se trouvent aux mêmes températures, du moins, lorsque $\frac{\vartheta(h)}{h}$ a pour les deux gaz la même valeur C (en d'autres termes, quand le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant est le même pour les deux gaz) et lorsque les valeurs de

μ , $\frac{\alpha}{e}$ et ν pour l'un des gaz se déduisent de celles pour l'autre au moyen de la multiplication par un même facteur indépendant de la température (ce qui est le cas quand les molécules des deux gaz peuvent être regardées comme des sphères élastiques). Ce facteur est alors la valeur de η , ζ et ϑ . Pour ϵ on doit évidemment prendre le rapport inverse des densités des gaz à pression égale et à température égale, et les formules font alors connaître dans quel rapport doivent être les dimensions des appareils et les densités du gaz dont ils sont remplis, pour que les deux cas soient entièrement comparables.

Enfin, il est facile de voir que, lorsqu'on expérimente avec deux gaz différents dans le même appareil, on obtiendra des cas comparables entre eux, en réglant les températures de telle sorte que h ait la même valeur dans les deux cas et en prenant les densités proportionnelles au coefficient du frottement.

§ 19. Cette considération des états correspondants peut, naturellement, être employée aussi dans d'autres problèmes sur le mouvement des gaz. Remarquons, à cet égard, que, dès qu'il n'y a pas à tenir compte de forces extérieures, la condition $\alpha = \epsilon$, résultant de (B_1) , est supprimée, ce qui rend possible une plus large application du principe.

En terminant, qu'il me soit permis de faire observer que la considération des états de mouvement correspondants peut être rendue entièrement indépendante des équations du mouvement, si l'on considère les molécules gazeuses comme des sphères élastiques, n'exercant pas d'attraction les unes sur les autres. On peut alors raisonner comme le fait M. Kamerlingh Onnes, dans sa „Théorie générale des fluides”. Lors, en effet, qu'un gaz, donc un système de sphères élastiques, se meut entre ou autour d'autres corps, qui eux-mêmes peuvent être en mouvement ou en repos, on peut, de différentes manières, déduire d'autres états de mouvement. Premièrement, on peut faire s'opérer les mêmes changements de lieu en une durée qui soit un certain nombre de fois plus grande ou plus petite que dans

le premier état. En second lieu, un état de mouvement est possible dans lequel le système mobile reste à chaque instant semblable de forme au système dans le premier état. Les dimensions des molécules et celles de l'espace dans lequel elles se meuvent sont alors toutes agrandies ou réduites un certain nombre de fois, et les vitesses du mouvement sont aussi changées dans le même rapport. Enfin, on peut encore, lorsqu'un système possède un certain état de mouvement, attribuer les mêmes mouvements à un second système, qui ne se distingue du premier qu'en ce que toutes les masses y sont changées dans le même rapport.

Quand des forces extérieures agissent, comme dans le cas des courants calorifiques que nous venons de considérer, il faut faire attention que, lors du passage d'un état de mouvement à l'autre, ces forces ne doivent pas, en général, rester les mêmes.
