is. Het gaat vooraf aan de contractie en volgt steeds in onmeetbaar korten tijd op de inwerking van den electrischen prikkel, terwijl het contractieproces steeds een merkbaar stadium van latente werking heeft, dat buitendien met afnemende sterkte van den prikkel zeer belangrijk grooter wordt.

Door de Heeren PLACE en VAN DER WAALS worden over enkele punten nadere inlichtingen gevraagd, en door den Spreker gegeven.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ bespreekt: „*het theorema van* POYNTING *over de energie in het electromagnetisch veld en een paar algemeene stellingen over de voortplanting van het licht*".

In 1883 heeft POYNTING [1]) eene tegenwoordig algemeen bekende beschouwing ontwikkeld, volgens welke overal in het electromagnetisch veld een energiestroom bestaat, die in richting en grootte (per vlakte-eenheid en tijdseenheid) bepaald wordt door het vector-product van de electrische en de magnetische kracht, gedeeld door 4 π. Eene meer algemeene stelling, waarin die van POYNTING als een bijzonder geval begrepen is, heb ik bij VOLTERRA [2]) gevonden. Het is deze algemeene stelling, die ik als uitgangspunt voor eenige beschouwingen wensch te kiezen.

§ 1. Schrijft men de grondvergelijkingen der theorie van MAXWELL in den eenvoudigen vorm die daaraan door HEAVISIDE en HERTZ werd gegeven, dan bevatten zij de volgende vectoren: de *electrische stroom* $\mathfrak{S}$, de *electrische kracht* $\mathfrak{E}$, de *magnetische kracht* $\mathfrak{H}$ en de *magnetische inductie* $\mathfrak{B}$; bovendien, wanneer men met dielectrica te doen heeft, de *dielectrische polarisatie* $\mathfrak{D}$.

Het verband tusschen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ en dat tusschen $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{S}$, of — in dielectrica — tusschen $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{D}$, is van den aard der stof afhankelijk. De overige vergelijkingen daarentegen, zoowel die, welke in het binnenste van een zelfde lichaam, als die, welke aan de grens van twee media gelden, zijn onder alle omstandigheden dezelfde.

Ten einde niet alleen het verloop van reeds opgewekte electriciteitsbewegingen, maar ook het ontstaan daarvan in de vergelijkingen uit te drukken, kan men aannemen dat hier of daar uitwendige

---

[1]) POYNTING, Phil. Trans. London. Vol. 175, p. 343.

[2]) VOLTERRA, Acta Mathematica. Deel 16, p. 189.

electromotorische krachten werken. Eene dergelijke kracht zal door E worden voorgesteld. Met de bewering dat zij bestaat, wordt in den grond der zaak niet anders bedoeld, dan dat de stroom $\mathfrak{S}$ — of de dielectrische verplaatsing $\mathfrak{D}$ — op dezelfde wijze met den vector $\mathfrak{E} + \mathrm{E}$ samenhangt, als anders met $\mathfrak{E}$ alleen.

Men kan zich voorstellen dat op die plaatsen waar eene electromotorische kracht werkt, overigens aan de eigenschappen der stof niets wordt veranderd, en dus aannemen dat, met uitzondering van het verband tusschen $\mathfrak{S}$ (of $\mathfrak{D}$) en $\mathfrak{E}$ de grondvergelijkingen den gewonen vorm behouden.

Wij zullen voorts nog onderstellen dat de vector E doorloopend van punt tot punt verandert, dat hij dus ook, zoo hij tot eene begrensde ruimte beperkt is, aan de grens daarvan geleidelijk tot 0 overgaat. Dit ter vermijding van mathematische complicaties.

§ 2. Wij beschouwen een willekeurig stelsel van geleidende of dielectrische, isotrope of anisotrope lichamen, aan alle zijden tot op oneindigen afstand door den aether omringd; daarbij sluiten wij echter de magnetische draaiing van het polarisatievlak, en de daarmede in verband staande verschijnselen van Hall en Kerr, alsmede de fluorescentie uit. In dit stelsel verbeelden wij ons *twee* verschillende bewegingstoestanden, ieder door zijn eigen electromotorische krachten opgewekt; de grootheden die bij den eersten bewegingstoestand te pas komen zullen door de boven aangegeven letters, en de overeenkomstige grootheden voor den anderen toestand door dezelfde letters met accenten worden voorgesteld.

Eindelijk denken wij ons een willekeurig gesloten oppervlak σ, en verstaan onder τ de ingesloten ruimte, onder $d\sigma$ en $d\tau$ een oppervlakte- en een ruimte-element. Dan kan, door toepassing van de voor alle lichamen geldende bewegingsvergelijkingen, met behulp van eene partieele integratie, de volgende formule worden bewezen:

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{H}\,\dot{\mathfrak{B}}')\,d\tau + \int(\mathfrak{E}'\,\mathfrak{S})\,d\tau = \frac{1}{4\pi}\int \begin{vmatrix} \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}'_x, & \mathfrak{E}'_y, & \mathfrak{E}'_z \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} d\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{I})$$

De twee eerste integralen hebben op de geheele ruimte τ, de derde op het geheele oppervlak σ betrekking. Verder zijn λ, μ en ν de richtingsconstanten der aan dit laatste naar buiten getrokken normaal.

*

Hier en in 't vervolg wordt met $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})$ het scalaire product van twee vectoren $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ voorgesteld en met $\dot{\mathfrak{A}}$ een vector, wiens componenten zijn $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial t}$.

§ 3. Onderstelt men dat de twee bewegingstoestanden dezelfde zijn, dan gaat (I) over in

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{H}\,\dot{\mathfrak{B}})\,d\tau + \int(\mathfrak{E}\,\mathfrak{S})\,d\tau = \frac{1}{4\pi}\int \begin{vmatrix} \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{E}_y, & \mathfrak{E}_z \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} d\sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

hetgeen niet anders is dan het theorema van Poynting. Wanneer wij nl. onderstellen dat tusschen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ de gewone lineaire betrekkingen bestaan, dan is de eerste term de aangroeiing per tijdseenheid van de in de ruimte τ aanwezige electrokinetische energie. De tweede term gaat voor een metaal, wanneer men daarvoor de wet van Ohm aanneemt, en dus het verband tusschen $\mathfrak{E} + \mathrm{E}$ en $\mathfrak{S}$ uitdrukt door

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x + \mathrm{E}_x &= \varkappa_{1\cdot 1}\,\mathfrak{S}_x + \varkappa_{1\cdot 2}\,\mathfrak{S}_y + \varkappa_{1\cdot 3}\,\mathfrak{S}_z, \\ \mathfrak{E}_y + \mathrm{E}_y &= \varkappa_{2\cdot 1}\,\mathfrak{S}_x + \varkappa_{2\cdot 2}\,\mathfrak{S}_y + \varkappa_{2\cdot 3}\,\mathfrak{S}_z, \\ \mathfrak{E}_z + \mathrm{E}_z &= \varkappa_{3\cdot 1}\,\mathfrak{S}_x + \varkappa_{3\cdot 2}\,\mathfrak{S}_y + \varkappa_{3\cdot 3}\,\mathfrak{S}_z, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

met

$$\varkappa_{1\cdot 2} = \varkappa_{2\cdot 1} \qquad \varkappa_{2\cdot 3} = \varkappa_{3\cdot 2} \qquad \varkappa_{3\cdot 1} = \varkappa_{1\cdot 3}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

over in

$$\int(\varkappa_{1\cdot 1}\,\mathfrak{S}_x^2 + \varkappa_{2\cdot 2}\,\mathfrak{S}_y^2 + \varkappa_{3\cdot 3}\,\mathfrak{S}_z^2 + 2\,\varkappa_{1\cdot 2}\,\mathfrak{S}_x\,\mathfrak{S}_y + 2\,\varkappa_{2\cdot 3}\,\mathfrak{S}_y\,\mathfrak{S}_z +$$
$$+ 2\,\varkappa_{3\cdot 1}\,\mathfrak{S}_z\,\mathfrak{S}_x)\,d\tau - \int(\mathrm{E}\,\mathfrak{S})\,d\tau,$$

en hier stelt de eerste term de warmteontwikkeling per tijdseenheid voor, en de tweede den negatief genomen arbeid der electromotorische krachten. Op dergelijke wijze vindt men dat de tweede integraal voor een dielectricum gelijk is aan de toename der electrostatische energie, verminderd met den arbeid der electromotorische krachten, beide berekend per tijdseenheid.

Houdt men dit een en ander in het oog, dan volgt uit (II) dat het tweede lid de hoeveelheid arbeidsvermogen moet voorstellen, die per tijdseenheid door het oppervlak σ naar binnen gaat. Het ligt voor de hand zich voor te stellen dat door elk element $d\sigma$ naar binnen treedt de hoeveelheid

$$\frac{1}{4\pi}\begin{vmatrix} \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{E}_y, & \mathfrak{E}_z \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} d\sigma$$

en dit is wat POYNTING beweert.

§ 4. Men kan de zaak ook omkeeren en, uitgaande van de stelling van POYNTING, besluiten dat, ook dan b.v. wanneer tusschen $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{H}$ niet meer eene eenvoudige lineaire betrekking bestaat, de eerste term in (II) de toename van het arbeidsvermogen in een magnetiseerbaar lichaam, vermeerderd met eene eventueele warmteontwikkeling, moet zijn.

Heeft er geene warmteontwikkeling plaats, dan moet dus het electrokinetische arbeidsvermogen per volume-eenheid, wat ook het verband zij tusschen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$, worden gegeven door

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{H}\,\dot{\mathfrak{B}})\,dt,$$

de integraal te nemen van af den oorspronkelijken niet magnetischen toestand.

Zooals bekend is, kan men, wegens het verschijnsel der magnetische hysteresis, een stuk ijzer een kringloop van veranderingen doen ondergaan, voor welken

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{H}\,\dot{\mathfrak{B}})\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

niet 0 is, maar eene positieve waarde heeft. Daar, als de kringloop volbracht is, het ijzer weder dezelfde electrische energie moet bevatten als aanvankelijk, moet (3) de warmteontwikkeling per volume-eenheid voorstellen, dus het verlies aan electrisch arbeidsvermogen van het geheele stelsel. Men kan voor (3) natuurlijk schrijven

$$\frac{1}{4\pi}\int (\mathfrak{H}\, d\, \mathfrak{B}).$$

In dezen vorm is de stelling herhaaldelijk bewezen en toegepast [1]), ofschoon misschien nooit op zoo eenvoudige wijze als het theorema van POYNTING veroorlooft.

De dielectrische hysteresis geeft natuurlijk tot dergelijke beschouwingen aanleiding.

In het vervolg zal worden aangenomen dat zoowel het verband tussen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ als dat tusschen $\mathfrak{S}$ (of $\mathfrak{D}$) en $\mathfrak{E}$ door de gewone lineaire vergelijkingen met constante coefficienten wordt uitgedrukt.

§ 5. Keeren wij terug tot de twee verschillende bewegingstoestanden, waarvan in de vergelijking (I) sprake is. Natuurlijk geldt eveneens de vergelijking die men uit (I) verkrijgt, als men de grootheden die op den eersten en den tweeden bewegingstoestand betrekking hebben, met elkaar verwisselt. Door verder de twee vergelijkingen van elkander af te trekken, vindt men :

$$\frac{1}{4\pi}\int \left\{ (\mathfrak{H}\,\dot{\mathfrak{B}}') - (\mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}}) \right\} d\tau + \int \left\{ (\mathfrak{E}'\,\mathfrak{S}) - (\mathfrak{E}\,\mathfrak{S}') \right\} d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \left\{ \begin{vmatrix} \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}'_x, & \mathfrak{E}'_y, & \mathfrak{E}'_z \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathfrak{H}'_x, & \mathfrak{H}'_y, & \mathfrak{H}'_z \\ \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{E}_y, & \mathfrak{E}_z \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} \right\} d\sigma \quad . \quad . \qquad \text{(III)}$$

De gevolgtrekkingen die wij uit deze vergelijking kunnen afleiden berusten hierop dat in vele gevallen de eerste integraal verdwijnt.

Dit is b,v. het geval, wanneer beide bewegingstoestanden in eene stationaire strooming in een stelsel geleiders bestaan; immers, dan is $\dot{\mathfrak{B}} = 0$ en $\dot{\mathfrak{B}}' = 0$. Neemt men dan voor σ het oppervlak van een bol die om eenig punt dezer geleiders als middelpunt beschreven is, en waarvan de straal al grooter en grooter wordt, dan nadert het tweede lid der vergelijking tot 0, daar de door constante stroomen teweeggebrachte magnetische kracht op groote afstanden omgekeerd evenredig met de derde macht van den afstand verandert.

---

[1]) WARBURG, Wied. Ann., Bd. 13, p. 141.
EWING, Phil. Trans. London, 1885, p. 549.

Men houdt dus over, als men bovendien de vergelijkingen (1) en (2) toepast,

$$\int (\mathrm{E}' \mathfrak{S})\, d\tau = \int (\mathrm{E}\, \mathfrak{S}')\, d\tau.$$

Stel nu dat bij den eersten bewegingstoestand alleen in eene zekere zeer kleine ruimte ω, gelegen aan het punt P, eene electromotorische kracht E in de richting h werkt, en eveneens bij den tweeden toestand eene electromotorische kracht E' in de richting h' binnen eene zeer kleine ruimte ω', gelegen aan P', dan is, als de eerste electromotorische kracht in P' een stroom oplevert, waarvan de component volgens h' door $\mathfrak{S}_{h'}$ (P') wordt voorgesteld, en $\mathfrak{S}'_h$ (P) eene soortgelijke beteekenis heeft voor het tweede geval,

$$\mathfrak{S}_{h'}(P') \; : \; \mathfrak{S}'_h(P) = \int_\omega \mathrm{E}\, d\tau \; : \; \int_{\omega'} \mathrm{E}'\, d\tau,$$

waaruit men gemakkelijk eene bekende stelling afleidt [1]).

§ 6. De vergelijking (III) kan ook op de voortplanting van *lichttrillingen* worden toegepast, wanneer men zich voorstelt dat deze door periodieke electromotorische krachten in de „lichtbronnen" worden opgewekt [2]). Wij zullen ons bepalen tot enkelvoudige trillingen met bepaalden trillingstijd, en dus aannemen dat over eene zekere uitgestrektheid eene electromotorische kracht werkt, waarvan de componenten als goniometrische functiën van den tijd gegeven zijn. Werken zulke krachten aanhoudend, dan zullen zich enkelvoudige trillingen naar alle zijden, en dus ook van het stelsel lichamen uit, in den aether voortplanten. Zooals men weet, kan men in het algemeen, en vooral wanneer er absorptie plaats heeft, den bewegingstoestand het gemakkelijkst bepalen door in plaats van de voor E_x, E_y, E_z gegeven goniometrische functiën van den tijd eerst waarden te stellen, die den tijd alleen in den factor

---

1) Zie b.v. MAXWELL, Electricity and Magnetism, 2e ed., Vol. 1, p. 373.

2) Het zou meer aan de werkelijkheid beantwoorden, zoo wij in de lichtbronnen „ionen" onderstelden, die op deze of gene wijze in trilling worden gehouden. De gekozen opvatting maakt de theorie eenvoudiger en komt in vele opzichten op hetzelfde neer.

$$e^{ini}, \quad (i = \sqrt{-1}, \; n \text{ constant})$$

bevatten en waarvan de werkelijke waarden de reëele gedeelten zijn. Aan de bewegingsvergelijkingen kan dan voldaan worden door voor de componenten van $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ eveneens uitdrukkingen te stellen, waarin deze factor voorkomt. Zijn deze uitdrukkingen gevonden dan heeft men, om de werkelijke beweging te leeren kennen, van alle het reëele gedeelte te nemen.

Wij zullen de complexe uitdrukkingen, waarvan ten slotte het reëele gedeelte moet genomen worden, de „symbolische" waarden noemen en nu in de vergelijking (III) onder de teekens $\mathfrak{E}_x$, enz. deze waarden verstaan. Uit de afleiding der vergelijking blijkt gemakkelijk dat dit geoorloofd is, mits men voor $(\mathfrak{A}\ \mathfrak{B})$ nu leze

$$\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z.$$

Ten gevolge van de ingevoerde onderstellingen wordt

$$(\mathfrak{H}\ \mathfrak{B}') - (\mathfrak{H}'\mathfrak{B}) = i\,n \left\{ (\mathfrak{H}\ \mathfrak{B}') - (\mathfrak{H}'\ \mathfrak{B}) \right\}$$

en verdwijnt dus, wegens het verband tusschen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$.

Wij nemen verder voor σ een oneindig grooten bol en kunnen dan aantoonen dat ook de derde integraal in (III) 0 is. Wat de tweede betreft, valt op te merken dat men bij het werken met de symbolische uitdrukkingen voor elk lichaam de vergelijkingen (1) en (2) kan laten gelden, als men maar onder de coefficienten $\varkappa$ complexe en van n afhankelijke grootheden verstaat; dien tengevolge blijven, evenals in de vorige §, alleen de termen met E en E' over.

Wij bepalen ons tot het geval dat E alleen in eene oneindig kleine ruimte ω aan het punt P werkt, en wel overal in dezelfde richting h, met de (reëele) richtingsconstanten a, b, c; eveneens moge E' beperkt zijn tot de oneindig kleine ruimte ω' aan het punt P' en de richting h', met de (eveneens reëele) richtingsconstanten a', b', c' hebben.

Indien dan met E en E' de symbolische uitdrukkingen voor de electromotorische krachten zelf worden aangeduid, kunnen wij voor de vergelijking schrijven

$$\left\{ a'\,\mathfrak{S}_x(P') + b'\,\mathfrak{S}_y(P') + c'\,\mathfrak{S}_z(P') \right\} \int_{\omega'} \mathrm{E}'\,d\tau =$$

$$= \left\{ a\,\mathfrak{S}_x'(P) + b\,\mathfrak{S}_y'(P) + c\,\mathfrak{S}_z'(P) \right\} \int_{\omega} \mathrm{E}\,d\tau.$$

Wij zullen aannemen dat bij den eersten bewegingstoestand de electromotorische kracht in de oneindig kleine ruimte ω overal dezelfde phase heeft en dus b.v. door $q \cos n t$ kan worden voorgesteld. Wij noemen dan die ruimte eene *enkelvoudige lichtbron met de trillingsrichting h* en kennen deze de phase van de electromotorische kracht zelf toe.

Verder noemen wij $\int q \, d\tau = s$ de *sterkte* der lichtbron; men ziet gemakkelijk in dat de op eenigen afstand opgewekte waarden van $\mathfrak{S}$ enz. alle evenredig met die sterkte moeten zijn.

Nemen wij nu aan dat ook E′ den factor $\cos n t$ bevat en noemen wij de intensiteit der tweede lichtbron s', dan moeten wij voor de intregralen in onze laatste vergelijking schrijven:

$$s \, e^{int} \text{ en } s' \, e^{int},$$

zoodat wij vinden

$$\mathfrak{S}_{h'}(P') : \mathfrak{S}'_h(P) = s : s',$$

waarbij wij onder de eerste termen de symbolische waarden van de componenten $\mathfrak{S}_{h'}$ en $\mathfrak{S}'_h$, de eerste in P′ en de tweede in P, te verstaan hebben. Daar s en s' reëel zijn, bestaat dezelfde verhouding ook tusschen de werkelijke waarden der componenten; derhalve:

Bestaan, bij twee bewegingstoestanden, in de punten P en P′ enkelvoudige lichtbronnen met de richtingen h en h', en met gelijke intensiteit en phase, dan is de electrische stroom, dien de eerste in P′ in de richting h' geeft, ten allen tijde gelijk aan den electrischen stroom, dien de tweede lichtbron in het punt P in de richting h teweegbrengt.

Eene stelling, die veel overeenkomst hiermede vertoont, is door von Helmholtz in zijne Physiologische Optik uitgesproken en men vindt bij verschillende schrijvers, o. a. bij Rayleigh [1]) en von Helmholtz [2]) zelven voor trillende stelsels in 't algemeen, echter, strikt genomen, voor staande trillingen, dergelijke theorema's bewezen.

---

[1]) Rayleigh, Theory of Sound, 1st. Ed., Vol. 1, p. 111.

[2]) von Helmholtz, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 100, p.p. 217—222.

§ 7. Wij kunnen uit de verkregen uitkomst nog eene gevolgtrekking afleiden, die ons straks van dienst zal zijn. Gemakshalve zullen wij daarbij eene lichtbron aanduiden door, behalve de richting, de werkelijke of de symbolische waarde van $\int E\,d\tau$ tusschen vierkante haken te plaatsen. Stel nu dat eene lichtbron $[e^{int}]$, in het punt P, met de richting h, in P′ volgens de richting h' een stroom teweegbrengt, waarvan de symbolische waarde is $\mathfrak{S}_{h'}(P')$. Deze uitdrukking hangt van de ligging van P′ af en kan dus naar eene of andere richting k — waarin wij P′ verplaatst denken — gedifferentieerd worden. Komt, na eene oneindig kleine verplaatsing δ, P′ in P″, dan is klaarblijkelijk

$$\delta \frac{\partial \mathfrak{S}_{h'}(P')}{\partial k} = \mathfrak{S}_{h'}(P'') - \mathfrak{S}_{h'}(P') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Maar, volgens de vorige §, is $\mathfrak{S}_{h'}(P')$ gelijk aan de stroomcomponent $\mathfrak{S}_h$, in P teweeggebracht door eene lichtbron $[e^{int}]$ in P′ in de richting h'. Op dezelfde wijze is $\mathfrak{S}_{h'}$ (P″) gelijk aan de stroomcomponent volgens h, in P opgewekt door eene lichtbron $[e^{int}]$ in P″, eveneens in de richting h'.

Het tweede lid der vergelijking is dus niet anders dan de waarde van $\mathfrak{S}_h$ in P, veroorzaakt door het gelijktijdig bestaan van twee lichtbronnen, $[e^{int}]$ in P″ en $[-e^{int}]$ in P′, beide in de richting h'. Kennen wij aan deze lichtbronnen, in plaats van de sterkte 1, die zij nu hebben, de sterkte s toe, zoodat zij door $[s\,e^{int}]$ en $[-\,s\,e^{int}]$ worden voorgesteld, dan wordt de waarde van $\mathfrak{S}_h$, die zij in P teweegbrengen

$$s \left\{ \mathfrak{S}_{h'}(P'') - \mathfrak{S}_{h'}(P') \right\},$$

of, volgens (4),

$$s\,\delta \frac{\partial \mathfrak{S}_{h'}(P')}{\partial k}.$$

Wij zullen de hier besproken combinatie van twee lichtbronnen van gelijke richting en sterkte, maar tegengestelde phase, een *koppel van lichtbronnen* noemen en onder de *sterkte* van dit koppel het product $s\,\delta$ verstaan.

Het blijkt dus dat de waarde in P' van

$$\frac{\partial\, \mathfrak{S}_{h'}(P')}{\partial\, k}$$

gelijk is aan de waarde van $\mathfrak{S}_h$, in P teweeggebracht door een zeker koppel in P'.

Het verdient nog opmerking dat de symbolische waarden voor $\mathfrak{E}_x$, enz., die eene lichtbron $[c\, s\, e^{int}]$ teweegbrengt, zich alleen door den factor c onderscheiden van de waarden, behoorende bij eene lichtbron $[s\, e^{int}]$ op dezelfde plaats en met dezelfde richting, en dat wel, ook al is c een complex getal.

Eveneens zal men, zoo men de lichtbronnen $[s\, e^{int}]$ en $[-s\, e^{int}]$ van een koppel door $[c\, s\, e^{int}]$ en $[-c\, s\, e^{int}]$ vervangt, alle daarvan afhankelijke symbolische waarden met c vermenigvuldigen.

§ 8. Uit de vergelijking (III) kan nu eindelijk eene stelling worden afgeleid, die kan worden opgevat als eene generalisatie van het bekende principe van Huygens. Om daartoe te geraken verstaan wij onder σ een gesloten oppervlak van eindige afmetingen, dat de beschouwde lichamen op willekeurige wijze doorsnijdt of omringt, en nemen voor den *eersten* bewegingstoestand de trillingen die door deze of gene *uitwendige* lichtbronnen van de periode $\frac{2\pi}{n}$ worden opgewekt. *Dezen* bewegingstoestand wenschen wij te onderzoeken; de invoering van den *tweeden* is slechts een hulpmiddel daarbij.

Zij Q een willekeurig punt binnen σ. Wij denken ons daar eene enkelvoudige lichtbron $[e^{int}]$ in de richting h en kiezen voor den tweeden toestand de door deze opgewekte trillingen.

Voor de eerste integraal in (III) vinden wij weder 0, en voor de tweede

$$-\, e^{int}\, \mathfrak{S}_h(Q),$$

zoodat wij verkrijgen

$$\mathfrak{S}_h(Q) = -\frac{1}{4\pi} e^{-int} \int \begin{vmatrix} \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}'_x, & \mathfrak{E}'_y, & \mathfrak{E}'_z \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} d\sigma \;+$$

$$+\frac{1}{4\pi} e^{-int} \int \begin{vmatrix} \mathfrak{H}'_x, & \mathfrak{H}'_y, & \mathfrak{H}'_z \\ \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{E}_y, & \mathfrak{E}_z \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} d\sigma \quad . \quad . \quad (5)$$

De elementen van deze integralen, die beantwoorden aan een bepaald element $d\sigma$, liggende aan het punt P, zullen wij nader beschouwen, en wel in de onderstelling dat daar ter plaatse de waarden van $\mathfrak{H}_x$, enz., $\mathfrak{E}_x$, enz. (de symbolische waarden) bekend zijn.

Het bedoelde element van de eerste integraal kan dan worden voorgesteld als eene homogene lineaire functie van $\mathfrak{E}'_x, \mathfrak{E}'_y, \mathfrak{E}'_z$, dus ook als eene zoodanige functie van $\mathfrak{S}'_x, \mathfrak{S}'_y, \mathfrak{S}'_z$. Den factor $-\frac{1}{4\pi}e^{-int}$ er onder begrijpende, schrijven wij voor die functie

$$\varphi\,\mathfrak{S}'_x + \psi\,\mathfrak{S}'_y + \chi\,\mathfrak{S}'_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De coefficienten φ, ψ, χ zijn bekende complexe grootheden, die natuurlijk $d\sigma$ als factor bevatten, maar onafhankelijk van den tijd zijn, daar in $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ de factor e^{int} voorkomt. Verder zijn die coefficiënten onafhankelijk van de ligging van het punt Q en van de gekozen richting h.

Nu is $\mathfrak{S}'_x$ de waarde van $\mathfrak{S}_x$, in P teweeggebracht door eene lichtbron $[e^{int}]$ in Q in de richting h. Volgens § 6 is dus $\mathfrak{S}'_x$ ook gelijk aan de waarde van $\mathfrak{S}_h$, die in Q zou worden veroorzaakt door eene lichtbron $[e^{int}]$ in P, in de richting der x-as. Wanneer wij dus in P in deze richting eene lichtbron $[\varphi\, e^{int}]$, en eveneens in de richtingen der y- en der z-as lichtbronnen $[\psi\, e^{int}]$, $[\chi\, e^{int}]$ plaatsen, zullen deze in Q een stroom in de richting h geven, waarvan de symbolische uitdrukking eene eerste bijdrage voor $\mathfrak{S}_h(Q)$ is.

Het thans te beschouwen element van de tweede der integralen in (5) is eene lineaire homogene functie van $\mathfrak{H}'_x$, $\mathfrak{H}'_y$, $\mathfrak{H}'_z$ en kan dus ook als eene dergelijke functie van $\mathfrak{B}'_x$, $\mathfrak{B}'_y$, $\mathfrak{B}'_z$ voorgesteld worden, en ook van $\dot{\mathfrak{B}}'_x$, $\dot{\mathfrak{B}}'_y$, $\dot{\mathfrak{B}}'_z$, daar deze grootheden zich van $\mathfrak{B}'_x, \mathfrak{B}'_y, \mathfrak{B}'_z$ alleen door den factor in onderscheiden. Substitueert men nu verder voor $\dot{\mathfrak{B}}'_x$, enz. de uit de bewegingsvergelijkingen voortvloeiende waarden:

$$\frac{\partial\,\mathfrak{E}'_y}{\partial z} - \frac{\partial\,\mathfrak{E}'_z}{\partial y}\,,\ \text{enz.},$$

en eindelijk hierin weder de waarden van $\mathfrak{E}'_x$, $\mathfrak{E}'_y$, $\mathfrak{E}'_z$, uitgedrukt in $\mathfrak{S}'_x$, $\mathfrak{S}'_y$, $\mathfrak{S}'_z$, dan verkrijgt men, nevens eene homogene, lineaire functie van $\mathfrak{S}'_x$, $\mathfrak{S}'_y$, $\mathfrak{S}'_z$, die bij (6) kan worden gevoegd, eene dergelijke functie van de differentiaalquotienten dezer grootheden naar de coördinaten. Van de coefficiënten, waarmede deze differentiaalquotienten vermenigvuldigd worden, geldt weer, als wij er den factor

$\frac{1}{4\pi} e^{-int}$ onder begrijpen, hetzelfde wat van φ, ψ, χ werd opgemerkt.

Het zal nu voldoende zijn, op een der termen, die men aldus verkrijgt, b.v. op

$$\zeta \frac{\partial \mathfrak{S}'_y}{\partial z}$$

de aandacht te vestigen. Uit het in de vorige § gezegde kan men afleiden dat dit de symbolische uitdrukking van den stroom is, die in Q in de richting h ontstaat door een koppel van lichtbronnen in P. En wel moeten de twee lichtbronnen die het koppel samenstellen in de richting der z-as op een oneindig kleinen afstand δ van elkander liggen, terwijl elke lichtbron de richting der y-as heeft en de eene door $\left[\frac{\zeta}{\delta} e^{int}\right]$, de andere door $\left[-\frac{\zeta}{\delta} e^{int}\right]$ wordt voorgesteld.

De slotsom van deze redeneering is dat men over het oppervlak σ eene zoodanige laag van enkelvoudige lichtbronnen en bovendien eene zoodanige laag van koppels van lichtbronnen kan verdeelen, dat deze voor $\mathfrak{S}_h$ in Q dezelfde symbolische waarde geven, als de uitwendige lichtbronnen. Dan zal echter ook dezelfde overeenstemming bestaan wat de werkelijke waarden van $\mathfrak{S}_h$ betreft.

Wat de bedoelde op σ aan te brengen lichtbronnen zelve aangaat, deze zijn geheel bekend, daar wij van elke lichtbron de richting kunnen aangeven en de integraal $\int E d\tau$ gelijk moet zijn aan het reëele deel der complexe uitdrukking die, tusschen vierkante haken geschreven, gediend heeft om de lichtbron voor te stellen. Daar de aldus bepaalde lichtbronnen dezelfde worden, hoe men het punt Q en de richting h ook kieze, blijkt het dat de toestand in *elk* punt binnen het oppervlak σ kan worden beschouwd als voortgebracht door eene bepaalde verdeeling van trillingsmiddelpunten over dit oppervlak.

Eene dergelijke stelling werd voor het geval van een enkel doorschijnend isotroop medium reeds vroeger door KIRCHHOFF bewezen [1]).

Hierop volgt eene korte discussie over sommige punten der voordracht tusschen den Spreker en de Heeren KORTEWEG en VAN DER WAALS.

---

[1]) KIRCHHOFF, Wied. Ann. Bd. 18, p. 663.