$\triangle K_T$ de waarden van deze grootheid volgens de door TAMMANN langs andere wegen gevonden getallen.

	c	A	B	n	C	$\triangle K$	$\triangle K_T$
Na Cl	9.48	— 0.00181	1.42	9.93	— 0.0213	1120	1090
	18.70	166	3.01	4.73	452	2720	2030
K Cl	9.48	— 0.00181	1.04	9.93	— 0.0156	862	636
	18.70	166	2.06	4.73	309	1860	1150
Ba Cl_2	9.48	— 0.00181	0.39	9.93	— 0.00584	323	526
	18.70	166	0.57	4.73	855	515	990
Ca Cl_2	9.48	— 0.00181	1.13	9.93	— 0.0169	934	1140
	18.70	166	2.38	4.73	357	2150	2400

De overeenstemming is voor sommige zouten bevredigend, bij andere daarentegen vindt men belangrijke afwijkingen.

5. Alles samengenomen moeten we tot het besluit komen, dat er bij de verandering van het specifieke draaiingsvermogen door druk, door concentratieverandering en door het toevoegen van een inactief zout meer gecompliceerde verschijnselen in het spel zijn dan door de hypothese van TAMMANN wordt weergegeven.

Mechanica. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan: *„Over den weerstand dien een vloeistofstroom in eene cilindrische buis ondervindt."*

§ 1. Zoolang de gemiddelde snelheid van een stationairen vloeistofstroom beneden eene zekere van de middellijn der buis en den aard der vloeistof afhankelijke waarde blijft, kunnen de bijzonderheden der beweging gemakkelijk uit de bekende bewegingsvergelijkingen worden afgeleid. De vloeistofdeeltjes bewegen zich alle evenwijdig aan de as en het drukverschil tusschen twee doorsneden der buis is, wanneer er geene glijding langs den wand bestaat, zooals wij in het vervolg zullen aannemen, evenredig met den coefficient der inwendige wrijving en met de *eerste* macht der gemiddelde snelheid, terwijl het verder bij buizen van cirkelvormige doorsnede door de wet van POISEUILLE bepaald wordt.

Komt de gemiddelde snelheid boven de zoo even genoemde waarde, boven de *kritische snelheid*, zooals OSBORNE REYNOLDS haar genoemd heeft, dan worden de verschijnselen geheel anders. Het tot onderhouding van den stroom noodige drukverschil, dus ook de weerstand dien de buis aan den stroom biedt, wordt evenredig met eene hoogere macht van de gemiddelde snelheid U, volgens vele waarnemingen evenredig met U^2, volgens andere met eene iets lagere macht; REYNOLDS b.v. vindt voor deze $U^{1.7}$.

Hoe nu de weerstand evenredig kan zijn met deze hoogere machten der snelheid is nog niet zoo opgehelderd als men kan verlangen.

§ 2. Van welken aard de vloeistofbeweging bij groote snelheden wordt, is vooral door de schoone proeven van REYNOLDS [1]) duidelijk geworden. Nog steeds kan eene beweging, overal evenwijdig aan de as, aan de bewegingsvergelijkingen voldoen; inderdaad kan men, zonder met deze in strijd te komen, bij eene beweging zooals die bij een klein drukverschil werkelijk bestaat, alle snelheden met een constanten factor van willekeurige grootte vermenigvuldigen.

Door de bedoelde proeven is echter bewezen, wat ook op theoretische gronden is in te zien, dat de aldus verkregen bewegingen *labiel* zouden zijn, dat dus, wanneer zij voor een oogenblik bestonden, kleine veranderingen in den toestand, door deze of gene stoornis ontstaan, zouden aangroeien. Men kan dergelijke veranderingen in de beweging opvatten als nieuwe bewegingen die op de oorspronkelijke worden gesuperponeerd. Daar men uit de theorie kan afleiden dat deze bijkomende bewegingen slechts bestaan kunnen, als hunne hoeksnelheden van 0 verschillend zijn, en daar de waarneming leert dat werkelijk bij groote snelheden in buizen en open kanalen deelen der vloeistofmassa eene wentelende beweging aannemen, kunnen de nieuwe bewegingen als „wervels" worden aangeduid, al moet opgemerkt worden, dat ook reeds bij de in § 1 genoemde strooming hoeksnelheden bestaan en dat ook deze strikt genomen eene wervelbeweging is.

Gebruiken wij intusschen thans het woord „wervels" alleen in den aangegeven zin, dan hebben wij ons voor te stellen, dat bij eene snelle strooming door eene buis gelijktijdig eene beweging met snelheden evenwijdig aan de as en eene wervelbeweging bestaat. Van de eerste hangt de hoeveelheid vloeistof af die door eene doorsnede van de buis stroomt en uit een practisch oogpunt van het meeste belang is; zij moge de „hoofdbeweging" genoemd worden. Deze strooming nu zal, juist onder den invloed van de gelijktijdig bestaande wervelbeweging, andere wetten volgen dan de eenvoudige in § 1 genoemde beweging; met name zal het verband tusschen weerstand en snelheid anders worden dan in de wet van POISEUILLE is uitgedrukt.

[1]) An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Phil. Trans., Vol. 174, p. 935, 1883.

§ 3. Hoe men tot de bewegingsvergelijkingen kan geraken, waaraan de hoofdbeweging, op zich zelf beschouwd, voldoen moet, heeft Reynolds [1]) doen zien.

Stellen wij de *werkelijke* waarden van de stroomcomponenten en den druk voor door u, v, w en p, de dichtheid door ϱ en den coefficient der inwendige wrijving door μ, dan hebben wij vooreerst

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\varrho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}+\frac{\partial (uw)}{\partial z}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}, \text{ enz. } (2)$$

waarin X_x, X_y, X_z enz. de van de wrijving afhankelijke spanningscomponenten zijn. Door invoering van de waarden

$$X_x=2\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$X_y=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$X_z=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

gaat (2) over in

$$\varrho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}+\frac{\partial (uw)}{\partial z}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\,\triangle\,u, \text{ enz. . } (2')$$

Wij kunnen, onder τ een zeker vastgesteld tijdsverloop verstaande, in elk punt x, y, z en op elk oogenblik t de waarden

$$\bar{u}=\frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{1}{2}\tau}^{t+\frac{1}{2}\tau} u\,d\,t,\quad \bar{v}=\frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{1}{2}\tau}^{t+\frac{1}{2}\tau} v\,d\,t,\quad \bar{w}=\frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{1}{2}\tau}^{t+\frac{1}{2}\tau} w\,d\,t$$

opmaken en deze de *gemiddelde waarden* der snelheidscomponenten in dat punt op den tijd t noemen. Of wel, wij kunnen een eindig of oneindig groot aantal punten in de nabijheid van P beschouwen, onder dien verstande dat wanneer men voor P een anderen stand P' kiest, deze geheele groep van punten met behoud van de onder-

---

[1]) On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. Phil. Trans., Vol. 186, p. 123, 1895.

linge standen zich mede verschuift, en onder de middelwaarden $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ verstaan het gemiddelde der waarden die elke der stroomcomponenten in al de punten dezer bij P behoorende groep aanneemt. Zoo er aanleiding toe bestaat kunnen wij ook eerst op de eerstgenoemde wijze de middelwaarden van u, v, w over het tijdsverloop τ, vervolgens van deze weder de middelwaarden over een groep van punten nemen, en wat men aldus verkrijgt door $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ voorstellen.

§ 4. Wij zullen aannemen dat de definitie der middelwaarden — door keuze van den tijd τ of van de groep van punten — zoo kan worden gegeven, dat uit de middelwaarden de „wervelbeweging" wegvalt en alleen wat wij de „hoofdbeweging" genoemd hebben, overblijft. Of, juister gezegd, wij onderstellen dat de gemiddelden op zoodanige wijze kunnen genomen worden dat eene beweging met de gemiddelde snelheden, die wij kortheidshalve de „gemiddelde" beweging noemen, aanmerkelijk eenvoudiger is dan de werkelijke beweging. Wij noemen die gemiddelde beweging dan de hoofdbeweging, en de beweging, die nog naast de gemiddelde bestaat, de wervelbeweging.

Wanneer eenmaal is vastgesteld, hoe de gemiddelde waarden van u, v en w zullen worden opgemaakt, kunnen wij eveneens van elke grootheid die bij het vraagstuk te pas komt en van x, y, z, t afhangt, op dezelfde wijze als van u, v, w de middelwaarde nemen. Wij zullen deze middelwaarden in het algemeen aanduiden door boven het teeken, dat de beschouwde grootheid voorstelt, eene streep te plaatsen. Verder onderstellen wij dat de middelwaarden aldus gedefinieerd worden dat

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \text{ enz.} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

wat b.v. bij de straks genoemde definities het geval is.

Terwijl nu $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{p}$ de middelwaarden zijn, zullen wij voor de werkelijke waarden stellen

$$u = \bar{u} + u', \; v = \bar{v} + v', \; w = \bar{w} + w', \; p = \bar{p} + p', \quad \ldots \quad (4)$$

zoodat u', v', w' (en, zoo men wil, ook p') bij de wervelbeweging behooren.

§ 5. Men zal nu uit de bewegingsvergelijkingen formules afleiden die de gemiddelde beweging nader bepalen, door eenvoudig van elken term dezer vergelijkingen de gemiddelde waarde te nemen en daarbij de betrekkingen (3) in het oog te houden. Wat de termen betreft, die alleen de eerste macht van u, v, w bevatten, verkrijgt men dan eene zeer eenvoudige uitkomst; de termen echter met u^2, uv, enz. vereischen nadere overweging. Wij zullen daarbij nog eene vereenvoudigende onderstelling invoeren, nl. dat de wervelbeweging veel sneller van punt tot punt of van oogenblik tot oogenblik wisselt dan de hoofdbeweging en dat men dus, over het tijdsverloop of voor de groep van punten, die bij het opmaken der middelwaarden te pas komen, en die zoo moeten zijn dat de snel wisselende wervelbeweging uit het gemiddelde wegvalt, de gemiddelde beweging zelf als constant mag beschouwen. Daaruit volgt b.v.

$$\bar{u} = \bar{u}$$

en — men neme slechts van beide leden der eerste vergelijking (4) het gemiddelde —

$$\overline{u'} = 0.$$

Heeft men nu $\overline{u^2}$ te zoeken, dan vervange men eerst u door $\bar{u} + u'$, zoodat men het gemiddelde van

$$\bar{u}^2 + 2\bar{u}\,u' + u'^2$$

te bepalen heeft. Daar $\bar{u}$ als eene constante beschouwd kan worden is de gemiddelde waarde van $\bar{u}^2$ door het teeken $\bar{u}^2$ zelf voor te stellen, en verkrijgt men voor de middelwaarde van $\bar{u}\,u'$

$$\bar{u}\,\overline{u'} = 0.$$

Derhalve wordt

$$\overline{u^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2}$$

en evenzoo vindt men b.v.

$$\overline{u\,v} = \bar{u}\,\bar{v} + \overline{u'\,v'}$$

Uit de vergelijkingen (1) en (2') volgt ten slotte

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\varrho\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\,\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}\,\bar{w})}{\partial z}\right]= \qquad\qquad \ldots (6)$$
$$=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\mu\,\Delta\,\bar{u}-\varrho\left[\frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{u'\,v'})}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{u'\,w'})}{\partial z}\right]$$

enz.

Dit zijn de betrekkingen die door OSBORNE REYNOLDS zijn opgesteld. Zij onderscheiden zich van de vergelijkingen voor de werkelijke beweging door het optreden der termen in het tweede lid, die met ϱ vermenigvuldigd zijn.

§ 6. De vorm dezer bijkomende termen leidt er toe de formules in denzelfden vorm te schrijven als de vergelijkingen (2), nl. in den vorm

$$\varrho\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\,\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}\,\bar{w})}{\partial z}\right]=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z},$$

enz., waarbij dan nu

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2\,\mu\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}-\varrho\,\overline{u'^2}, \\ X_y &= \mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)-\varrho\,\overline{u'\,v'}, \\ X_z &= \mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)-\varrho\,\overline{u'\,w'}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

enz. wordt.

Men kan derhalve de hoofdbeweging op zich zelf behandelen, als men maar aanneemt dat de spanningscomponenten daarbij niet alleen de door de gewone uitdrukkingen

$$2\,\mu\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x},\ \mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right),\ \text{enz.}$$

bepaalde waarden hebben, maar dat de wervelbeweging nog als het ware nieuwe spanningscomponenten

$$-\varrho\,\overline{u'^2},\ -\varrho\,\overline{u'v'}$$

te voorschijn roept.

Deze opvatting ligt ook zeer voor de hand, als men bedenkt dat dezelfde uitwerking die door werkelijke spanningscomponenten kan worden teweeggebracht, ook zou worden verkregen wanneer door vlakte-elementen in het beschouwde lichaam stofdeeltjes, die eene hoeveelheid van beweging medevoeren, heengaan. (Men denke aan de verklaring van den druk en de inwendige wrijving in de kinetische gastheorie). Zelfs kan men uit de beschouwing dezer hoeveelheden van beweging de bewegingsvergelijkingen rechtstreeks afleiden. Immers, wanneer men een vaststaand volume-element beschouwt, moet de toename per tijdseenheid van de daarin aanwezige hoeveelheid van beweging, genomen b.v. in de richting der x-as, gelijk zijn aan de in die richting op het volume-element werkende kracht, vermeerderd met de hoeveelheid van beweging, die door de zijvlakken van het element meer naar binnen dan naar buiten gaat. Nemen wij in de vergelijking die dit uitdrukt van alle termen de middelwaarde, en vatten wij den druk en de wrijving als werkelijke krachten op, dan verkrijgen wij

$$\varrho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} + \frac{\partial \bar{Q}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{Q}_{xz}}{\partial z}, \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

waarin Q_{xx}, Q_{xy}, Q_{xz} eene voor de hand liggende beteekenis hebben. Q_{xx} stelt de per tijdseenheid en per vlakte-eenheid berekende hoeveelheid van beweging in de richting der x-as voor, die, tengevolge van de zichtbare vloeistofbeweging (niet van de warmtebeweging) door een vlakte-element loodrecht op de x-as meer naar de zijde der negatieve dan naar de zijde der positieve x gaat; Q_{xy} is de overeenkomstige hoeveelheid van beweging, door een element, loodrecht op de y-as, meer naar den kant der negatieve y dan naar dien der positieve y gaande, enz.

Gemakkelijk ziet men nu in dat

$$Q_{xx} = - \varrho \, u^2, \; Q_{xy} = - \varrho \, u \, v$$

is, en dus (verg. § 5)

$$\bar{Q}_{xx} = - \varrho \, (\bar{u}^2 + \overline{u'^2}),$$

$$\bar{Q}_{xy} = - \varrho \, (\bar{u} \, \bar{v} + \overline{u' \, v'}), \text{ enz.}$$

Door dit in de vergelijkingen (8) te substitueeren komt men tot den vorm (6) terug.

§ 7. BOUSSINESQ [1]) heeft de vergelijkingen voor de gemiddelde beweging opgesteld op een wijze, die eenige overeenkomst met de bovenstaande vertoont. Hij stelt daarbij (p. 29), m.i. minder gelukkig, de gemiddelde versnellingscomponenten voor door

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \text{ enz.};$$

hij neemt nl. aan dat de middelwaarde van

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial u'}{\partial y} + w'\frac{\partial u'}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

0 is. Wegens de continuiteitsvergelijking, waaraan ook u', v', w' voldoen, kan men voor (9) schrijven

$$\frac{\partial (u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u'v')}{\partial y} + \frac{\partial (u'w')}{\partial z}$$

en de middelwaarde daarvan is niet 0, maar

$$\frac{\partial (\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial z}.$$

Door deze uitdrukking te verwaarloozen laat dus BOUSSINESQ juist datgene weg, wat ons tot de termen met u', v', w' in de formules (6) geleid heeft. Hij maakt dit intusschen weder eenigszins goed door aan te nemen, dat de wervelbeweging op eene of andere wijze eene wrijving, naast de gewone, teweegbrengt, en dat dus aan de spanningscomponenten

$$2\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \; \mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right), \text{ enz.}$$

zekere van de wervelbeweging afhankelijke waarden moeten worden toegevoegd. Hij neemt nu echter aan, dat *deze* waarden op dergelijke wijze als de bovenstaande van de differentiaal-quotienten $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, enz. afhangen en dat dus voor de totale spanningscomponenten mag geschreven worden

[1]) Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires des savants étrangers. T. 23, No. 1, 1877.

$$2\,\varepsilon\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial x},\ \varepsilon\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right),\ \text{enz.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

met een coëfficient ε, die van de intensiteit der wervelbeweging afhangt.

Al moge het nu BOUSSINESQ gelukt zijn, door de onderstellingen, die hij omtrent ε maakt, tot formules te geraken, die met de waarnemingen in overeenstemming zijn, het bewijs is volstrekt niet geleverd dat de formules (7) in den vorm (10) kunnen worden geschreven.

§ 8. Wil men de waarden (7) nader onderzoeken, dan is in de eerste plaats het onderzoek der wervelbeweging (u', v', w') zelf noodig, en daartoe moeten de bewegingsvergelijkingen voor deze beweging worden opgesteld. Men verkrijgt deze, wanneer men in (1) en (2') u, v, w, p vervangt door $\bar{u}+u'$, $\bar{v}+v'$, $\bar{w}+w'$, $\bar{p}+p'$, en er vervolgens de vergelijkingen (5) en (6) van aftrekt. De uitkomst is

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}\varrho\left(\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\,\frac{\partial u'}{\partial x}+\bar{v}\,\frac{\partial u'}{\partial y}+\bar{w}\,\frac{\partial u'}{\partial z}+u'\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+v'\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+w'\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)&=\\ =-\frac{\partial p'}{\partial x}+\mu\,\Delta\,u',\ \text{enz.}&\end{aligned}\right\} \quad . \quad (12)$$

Het is onnoodig te zeggen dat men bij de integratie dezer vergelijkingen groote moeilijkheden ontmoet. De theorie der wervelbewegingen in een stilstaande vloeistofmassa is tot op zekere hoogte ontwikkeld, maar om de vraagstukken der hydraulica streng op te lossen, zou men de wervelbeweging moeten onderzoeken in eene vloeistof, die reeds de van punt tot punt veranderlijke snelheden $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ bezit.

§ 9. Intusschen kan men, zooals reeds REYNOLDS heeft doen zien, eenige gevolgtrekkingen afleiden uit eene formule, die men als de vergelijking der energie voor de wervelbeweging kan beschouwen.

Duiden wij vooreerst voor een willekeurige grootheid φ, die van x, y, z, t afhangt, door

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\bar{u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\bar{v}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\bar{w}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

de verandering per tijdseenheid aan, die zij ondergaat in een punt dat met de hoofdbeweging medegaat, en schrijven wij dus de vergelijkingen (12) in den vorm

$$\varrho\left(\frac{du'}{dt}+u'\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+v'\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+w'\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p'}{\partial x}+\mu\,\Delta\,u',$$

enz.; vermenigvuldigen wij vervolgens deze drie vergelijkingen met u', v', w', en tellen ze daarna bij elkander op. De uitkomst, die wij daardoor verkrijgen, kan na eenige transformatiën, waarbij ook (11) in aanmerking wordt genomen, worden gebracht in een der vormen

$$\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}\,\varrho\,(u'^2+v'^2+w'^2)\right]=\varrho\,M-\frac{\partial(u'p')}{\partial x}-\frac{\partial(v'p')}{\partial y}-\frac{\partial(w'p')}{\partial z}+$$

$$+\tfrac{1}{2}\,\mu\,\Delta\,(u'^2+v'^2+w'^2)+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}+w'\frac{\partial u'}{\partial z}\right)+\right.$$

$$\left.+\text{ enz.}\right]-\mu\,N \quad . \quad . \quad (13)$$

en

$$\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}\,\varrho\,(u'^2+v'^2+w'^2)\right]=\varrho\,M-\frac{\partial(u'p')}{\partial x}-\frac{\partial(v'p')}{\partial y}-\frac{\partial(w'p')}{\partial z}+$$

$$+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}(v'\zeta'-w'\eta')+\frac{\partial}{\partial y}(w'\xi'-u'\zeta')+\frac{\partial}{\partial z}(u'\eta'-v'\xi')\right]-$$

$$-\mu\,N', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13')$$

waarin

$$M=-\left[u'^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+v'^2\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+w'^2\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}+u'v'\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+v'w'\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)+w'u'\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$N=\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial y}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\partial w'}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$N'=\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

terwijl

$$\xi' = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \eta' = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}$$

de dubbele hoeksnelheden bij de wervelbeweging voorstellen.

Integreert men na vermenigvuldiging met een volume-element $d\tau$ de vergelijkingen (13) en (13') over de ruimte binnen eenig gesloten oppervlak σ, dan verkrijgt men in het eerste lid

$$\frac{dE}{dt},$$

nl. de aangroeiing per tijdseenheid van de kinetische energie E der wervelbeweging binnen een oppervlak σ, dat aan de hoofdbeweging deelneemt. In het tweede lid ontstaan verschillende oppervlakte-integralen, die echter in sommige gevallen zullen wegvallen, b. v. wanneer aan de grenzen der ruimte u', v' en w' verdwijnen. De vergelijkingen nemen dan den volgenden vorm aan

$$\frac{dE}{dt} = \varrho \int M\, d\tau - \mu \int N\, d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

of

$$\frac{dE}{dt} = \varrho \int M\, d\tau - \mu \int N'\, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17')$$

Het is deze vergelijking, in haar eersten vorm (17), die door Reynolds werd gebruikt om tot een kenmerk voor de stabiliteit eener vloeistofbeweging te geraken. Men kan zich nl. voorstellen dat nevens eene aanvankelijk alleen bestaande hoofdbeweging door deze of gene oorzaak eene zwakke wervelbeweging optreedt en dat dan uit (17) de waarde van $\frac{dE}{dt}$ wordt afgeleid. Valt die waarde negatief uit, dan zal de pas ontstane wervelbeweging zwakker worden, en verdient dus de oorspronkelijke toestand stabiel genoemd te worden. Daarentegen wijst een positief teeken van $\frac{dE}{dt}$ op een labiel zijn van dien toestand.

Men kan zich eveneens voorstellen dat aanvankelijk eene wervelbeweging met eindige snelheden bestaat en de vergelijking bezigen om te doen zien of die beweging versterkt of verzwakt zal worden. Het geval is ook denkbaar, dat de intensiteit der wervelbeweging constant blijft; daartoe moeten de twee integralen in het tweede lid van (17) gelijke waarden hebben.

§ 10. Daar alles afhangt van de relatieve waarden der integralen

$$\varrho \int M\, d\tau \text{ en } \mu \int N\, d\tau. \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (18)$$

besluit men gemakkelijk tot het volgende:

a. Het aangroeien of afnemen eener wervelbeweging hangt niet af van de *grootte* en de *richting* der daarbij voorkomende snelheden. Immers, wanneer men u', v', w' overal met eenzelfden positieven of negatieven factor vermenigvuldigt, verandert de relatieve grootte van de integralen (18) niet.

b. Uit (17) volgt dat alleen wervels van eene bepaalde soort zullen kunnen aangroeien en in stand blijven; bepaalde combinaties der teekens van u', v', w' zullen daartoe, in vele gevallen ten minste, de overhand moeten hebben boven andere combinaties. Het is nl. noodig dat $\int M\, d\tau$ positief is; indien dus van de differentiaalquotienten van $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ b. v. alleen $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ in aanmerking mocht komen, is het blijkens (14) voor het voortbestaan der wervels noodig dat u', v' overal of althans op de meeste plaatsen het tegengestelde teeken heeft als $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$.

c. In de onderstelling dat de wervels van dien aard zijn, dat $\varrho \int M\, d\tau$ positief uitvalt, kan men nu verder besluiten dat deze term den steeds negatieven term $-\int N\, d\tau$ des te eerder zal overtreffen, naarmate de differentiaalquotienten van $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ naar x, y, z grooter zijn. Derhalve zullen groote snelheden of liever groote snelheidsvervallen bij de hoofdbeweging de strekking hebben, eene beweging zonder wervels labiel te maken, en wordt het bestaan van eene kritische snelheid voor eene gegeven buis begrijpelijk.

d. Het verdient verder opmerking dat in M de snelheden u', v', w' zelf en in N de differentiaalquotienten daarvan naar x, y, z voorkomen. Men kan bij eene bepaalde wervelbeweging eene zekere lengte λ kiezen, zoodanig dat men, in de vloeistof over een afstand van de orde λ voortgaande, de snelheden u', v', w' veranderingen ziet ondergaan, die vergelijkbaar zijn met de grootste waarden der snelheden. Wij zullen eene dergelijke lijn λ de *afmeting* der wervels noemen. Zijn dan verder de snelheden u', v', w' van de orde $\varkappa$, dan zijn de differentiaalquotienten van de orde $\frac{\varkappa}{\lambda}$. Terwijl in M termen met den factor $\varkappa^2$ voorkomen, zal N termen bevatten, die vergelijkbaar zijn met $\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}$. Derhalve zal in (17) de tweede term in vergelijking met den eersten des te grooter zijn, naarmate λ kleiner is, d. w. z. wervels van kleine afmeting zullen gemakkelijker worden uitgedoofd dan wervels van groote afmeting; voor hunne aangroeiing en hunne instandhouding zullen grootere snelheidsvervallen der hoofdbeweging vereischt worden. Men mag wel verwachten dat in enge buizen kleinere wervels zullen voorkomen, dan in wijde buizen; zoo wordt het dus begrijpelijk dat in enge buizen de kritische snelheid grooter is dan in wijde, zooals dat in de door Reynolds opgestelde wet wordt uitgedrukt.

e. Dezelfde redeneering toepassende op een geval, waarin $\frac{dE}{dt} = 0$ is, kan men besluiten dat in het algemeen de afmeting λ des te kleiner zal zijn, naarmate de snelheidsvervallen grooter worden.

§ 11. De wet van Reynolds, die de afhankelijkheid der kritische snelheid van de middellijn der buis en van ϱ en μ aangeeft, kan gemakkelijk uit de vergelijking van gelijkvormige bewegingstoestanden worden afgeleid. Daarentegen kan men, naar het mij voorkomt, niet veel waarde hechten aan de theoretische bepaling van de absolute grootte der kritische snelheid, die de genoemde natuurkundige beproefd heeft. Die bepaling berust op onderstellingen aangaande de waarden van u', v', w', waarvan het m. i. twijfelachtig is of zij genoegzaam aan de werkelijkheid beantwoorden.

§ 12. Terwijl veel van hetgeen tot nog toe gezegd werd ook in andere gevallen van toepassing is, zullen wij van nu af alleen over eene stationaire beweging in cilindrische buizen met cirkelvormige doorsnede handelen. Wij zullen de x-as langs de as der buis plaatsen en onder de middelwaarde (§ 4) eener grootheid φ in een punt P (x, y, z) het gemiddelde verstaan van de waarden op eene lijn door P evenwijdig aan de as der buis getrokken, en zich aan weerszijden van P tot een afstand l uitstrekkende, die groot is in vergelijking met λ. Met „stationair" wordt verder bedoeld dat de snelheid der hoofdbeweging in een bepaald punt onafhankelijk van den tijd is en dat de wervelbeweging in haar geheel aanhoudend dezelfde intensiteit heeft, al mogen wij niet aannemen dat ook u' v' w' onafhankelijk van t zijn. Wij zullen onderstellen dat de intensiteit der wervelbeweging in de verschillende deelen der buis dezelfde is, dat dus b. v. $\overline{u'^2}$, $\overline{u'v'}$, enz. onafhankelijk van x zijn en dat de hoofdbeweging overal de richting der as heeft. Dan is dus $\bar{v} = \bar{w} = 0$, terwijl $\bar{u}$ alleen van y en z afhangt en om redenen van symmetrie eene functie van den afstand tot de as moet zijn. De druk $\bar{p}$ zal lineair van x afhangen en voor zoover hij van y en z afhangt, zal de verandering in elke doorsnede der buis dezelfde zijn, zoodat het drukverval $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ in de geheele buis eene constante waarde heeft.

Men ziet gemakkelijk in dat deze onderstellingen in overeenstemming zijn met de vergelijkingen (5) en (6); immers, alle termen die in deze vergelijkingen overblijven zijn onafhankelijk van x en t.

Eindelijk nemen wij nog aan dat aan den wand geene glijding bestaat. Daar is dus $u = v = w = 0$. De voor de gemiddelden gekozen definitie brengt mede dat dan ook aan den wand

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0. \qquad (19)$$

is, en daaruit volgt dan

$$u' = v' = w' = 0 \qquad (20)$$

De vergelijking (13) of (13') zullen wij thans integreeren over het deel van den cilinder dat tusschen twee loodrechte doorsneden S_1 en S_2 begrepen is.. Wij kiezen den afstand L dezer doorsneden zoo groot, dat men alle termen, die niet evenredig met dien afstand toenemen, mag weglaten tegenover de termen, waarmede dat wel het geval is. Tot deze laatste termen behooren $\frac{dE}{dt}, \varrho \int M\, d\tau$ en $\mu \int N\, d\tau$. Tot de eerste de integralen over de eindvlakken, die voortvloeien uit de differentiaalquotienten naar x in (13) of (13'). De differentiaalquotienten naar y en z geven aanleiding tot integralen over den buiswand, die wegens (20) verdwijnen.

Zal nu de toestand in den boven aangegeven zin stationair zijn, dan moet

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

zijn, en wij verkrijgen dus de betrekking

$$\varrho \int M \, d\tau = \mu \int N \, d\tau \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (21)$$

die ons straks van dienst zal zijn.

§ 13. In plaats van met de bewegingsvergelijking (6) te werken kunnen wij rechtstreeks de hoeveelheid van beweging in de richting der x-as beschouwen van de vloeistofmassa, die besloten is binnen een met den buiswand coaxialen cilinder C met den straal r, afgesneden door de twee bovengenoemde doorsneden S_1 en S_2. Deze hoeveelheid van beweging, die klaarblijkelijk van de *hoofdbeweging* afhangt, moet volgens de gemaakte onderstellingen constant blijven. Derhalve moeten de oorzaken die haar trachten te wijzigen elkander opheffen. Deze oorzaken nu zijn:

1°. Het drukverschil $p_1 - p_2$ tusschen de eindvlakken, en hierbij hebben wij alleen met $p_1 - \bar{p}_2$ te doen, daar $p'_1 - p'_2$ niet evenredig met L toeneemt. Is q het constante drukverschil per lengteeenheid, dan mogen wij stellen

$$p_1 - \bar{p}_2 = q\, L,$$

en verkrijgen hieruit eene kracht

$$\pi\, q\, L\, r^2$$

in de richting van den stroom.

2°. De wrijving op den cilinder C. Deze is per eenheid van oppervlak

$$\mu \frac{\partial u}{\partial r}$$

maar, daar wij alleen met de middelwaarden te doen hebben, mogen wij dit vervangen door

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dr},$$

wat in alle punten van C even groot is. De totale hieruit voortvloeiende kracht is dus

$$2\, \pi\, \mu \frac{d\bar{u}}{dr}\, r\, L.$$

3°. De hoeveelheid van beweging die door de eindvlakken heengaat. Deze is, wat de hoofdbeweging betreft, 0, en kan, ook wat de wervelbeweging betreft. buiten beschouwing blijven, daar, al moge deze eene hoeveelheid van beweging in de richting der x-as door eene doorsnede voeren, het verschil dier twee hoeveelheden voor S_1 en S_2 niet evenredig met L toeneemt.

4°. De hoeveelheid van beweging, die door den cilindermantel C gaat. Voor een element $d\sigma$ daarvan, gelegen op de beschrijvende lijn ($y = r$, $z = 0$), is deze hoeveelheid per tijdseenheid

$$-\varrho\, u\, v\, d\sigma,$$

of

$$-\varrho\,(\bar{u} + u')\, v'\, d\sigma. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

De gemiddelde waarde hiervan, waarmede wij alleen te doen hebben, is

$$-\varrho\,.\,\overline{u'\,v'}\, d\sigma,$$

welke waarde wij door

$$-Q\, d\sigma$$

zullen voorstellen. Klaarblijkelijk is nu de overeenkomstige hoeveelheid van beweging voor elk element van C met behulp van denzelfden factor Q voor te stellen, wat dus in het geheel

$$-2\,\pi\, Q\, r\, L$$

oplevert.

Ten slotte verkrijgen wij dus

$$\pi\, q\, r^2\, L = -2\,\pi\,\mu\,\frac{d\,\bar{u}}{d\,r}\, r\, L + 2\,\pi\, Q\, r\, L \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Was er nu geene wervelbeweging, dan zou de laatste term ontbreken; dan zou dus het drukverschil tusschen S_1 en S_2 juist moeten dienen om de wrijving op den cilindermantel te overwinnen. Dit zelfde gaat nu ook nog door — al is er wervelbeweging — als men de bovenstaande beschouwing op den *geheelen* vloeistofcilinder toepast, of juister gezegd, als men r tot R, den straal der buis, laat naderen. Immers, aan den wand is $u' = v' = 0$, en voor $r = R$ zal dus $Q = 0$ worden, zoodat men in elk geval verkrijgt:

$$\pi\, q\, R^2\, L = -2\,\pi\,\mu\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R} R\, L \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Nu leeren de waarnemingen over de strooming door buizen, met eene grootere dan de kritische snelheid, dat het drukverval q, dat vereischt wordt om een bepaald volume per tijdseenheid door eene doorsnede te persen, dikwijls vele malen grooter is dan het drukverval dat noodig zou zijn, als de wet van POISEUILLE doorging. Daar nu ook in dit laatste geval de vergelijking (24) zou gelden, blijkt het dat het snelheidsverval

$$-\frac{d\bar{u}}{dr}$$

aan den wand veel grooter moet zijn dan bij de beweging volgens de wet van POISEUILLE, bij welke, zooals men weet, de snelheid evenredig met

$$R^2 - r^2$$

is.

Is nu in de beide gevallen de doorstroomende hoeveelheid dezelfde, dan kan het groote snelheidsverval aan den wand alleen bestaan ten koste van het snelheidsverval nabij de as. Derhalve moet in punten die dicht bij de as liggen de waarde van $\frac{d\bar{u}}{dr}$ kleiner zijn dan wanneer de wet van POISEUILLE gevolgd werd. Aangezien echter in de vergelijking (23) q nog steeds grooter is dan deze wet vereischt, ziet men dat voor kleine waarden van r het drukverschil, dat door het eerste lid van (23) wordt voorgesteld, slechts voor een klein deel door de werkelijke wrijving kan worden opgeheven; grootendeels moet het door de nieuwe „wrijving" (§ 6) worden opgeheven, die de wervels teweegbrengen.

§ 14. Het blijkt op deze wijze dat de groote weerstand bij aanmerkelijke snelheden ten nauwste samenhangt met het sedert lang bekende feit dat de snelheid van de as af eerst langzaam en daarentegen dicht bij den wand sneller afneemt.

Gemakkelijk is het trouwens in te zien dat de wervels, die de vloeistoflagen door elkander roeren, de verschillen tusschen de snelheden op verschillende afstanden van de as meer of minder moeten vereffenen. De uiterste vloeistoflaag ontsnapt aan dezen invloed omdat aan den wand $\bar{u} = 0$ moet zijn; er zal dus een laag nabij den wand zijn, waarin de verandering, die de snelheid in het geheel van den wand af tot de as toe ondergaat, voor het grootste gedeelte gevonden wordt. Is de dikte dezer laag δ, en U de gemiddelde snelheid, dan wordt het snelheidsverval aan den wand

$$-\frac{d\bar{u}}{dr}_{(r=R)}$$

van de orde $\frac{U}{\delta}$ en de weerstand van de orde $\mu\frac{U}{\delta}$.

De weerstand zal dus evenredig kunnen worden met eene macht van U, hooger dan de eerste, wanneer bij het klimmen van U de bedoelde wandlaag dunner wordt.

Daarvoor is, zooals uit het boven gezegde blijkt, wel eenige grond aan te geven, wanneer men zich nl. voorstelt dat bij vergrooting van U ook de wervelbeweging heviger wordt en dan het dooreenroeren der vloeistoflagen zich tot op kleineren afstand van den wand uitstrekt. Tot bevestiging kan, naar 't schijnt, ook nog de vergelijking (21) dienen. Men mag, naar 't mij voorkomt, wel aannemen dat δ van dezelfde orde is als de afmetingen λ der wervels en deze nemen, in het algemeen gesproken, af bij vermeerdering der stroomsnelheid.

Aan deze beschouwing, die, zooals men ziet, nog veel aan strengheid te wenschen overlaat, wil ik nog toevoegen dat de tweede term in (21) een factor van de orde $\mu \frac{\varkappa^2}{\lambda^2}$ bevat. Het is dus te verwachten dat λ des te grooter zal worden, naarmate μ toeneemt; daardoor wordt het eenigszins begrijpelijk dat de dikte δ der grenslaag eveneens te gelijk met μ klimt. Dit moet inderdaad het geval zijn, en wanneer de weerstand evenredig met U^2 wordt zelfs in die mate dat $\frac{\mu}{\delta}$ onafhankelijk van μ wordt. Men kan nl. door de vergelijking van gelijkvormige bewegingen aantoonen dat de weerstand in eene buis, wanneer hij evenredig met U^2 is, onafhankelijk van μ moet zijn, en evenredig met ϱ, evenals men kan bewijzen dat bij eene evenredigheid tusschen den weerstand en U zelf, de weerstand den factor μ moet bevatten, maar onafhankelijk van ϱ moet zijn. Een en ander ligt ook in de formules van REYNOLDS opgesloten.

Het verdient nog opgemerkt te worden dat men, wanneer, bij groote waarden van U, in eene zeer dunne laag nabij den wand, een groot snelheidsverval bestaat, zich zal kunnen uitdrukken als of die laag er niet was (zij zal trouwens allicht aan de waarneming ontsnappen) en zal kunnen zeggen dat de vloeistof met eene met U vergelijkbare snelheid langs den wand glijdt.

§ 15. Het zij mij ten slotte vergund, voor het geval eener stationaire vloeistofstrooming in eene buis de vergelijking (21), in het bijzonder het eerste lid daarvan, nader te beschouwen. De formule (14) gaat over in

$$M = - \left[\overline{u' v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right],$$

wat wij bij de berekering der integraal kunnen vervangen door de gemiddelde waarde

$$M = -\left[\overline{u'}\,\overline{v'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \overline{u'}\,\overline{w'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right]$$

Deze uitdrukking zal nu alleen van r afhangen. In een punt, waar $y = r$, $z = 0$ is, heeft men

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = \frac{d\bar{u}}{dr} \quad , \quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} = 0,$$

en, zooals wij in § 13 stelden,

$$\varrho\,\overline{u'\,v'} = Q.$$

Derhalve is

$$\varrho\,M = -\,Q\,\frac{d\bar{u}}{dr}.$$

Nu volgt uit (23) en (24)

$$Q = \tfrac{1}{2}\,q\,r + \mu\,\frac{d\bar{u}}{dr}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$Q = -\,\mu\left\{\frac{1}{R}\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R} - \frac{1}{r}\,\frac{d\bar{u}}{dr}\right\}.$$

Derhalve is

$$\varrho\,M = \mu\,r\,\frac{d\bar{u}}{dr}\left\{\frac{1}{R}\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R} - \frac{1}{r}\,\frac{d\bar{u}}{dr}\right\},$$

en

$$\varrho\int M\,d\,\tau = 2\,\pi\,\mu\,L\int_0^R\frac{d\bar{u}}{dr}\left\{\frac{1}{R}\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R} - \frac{1}{r}\,\frac{d\bar{u}}{dr}\right\}r^2\,dr \quad . \quad . \quad (26)$$

Maakt men van de waarde (25) gebruik, dan vindt men

$$\varrho\int M\,d\,\tau = -\,\pi\,q\,L\int_0^R r^2\,\frac{d\bar{u}}{dr}\,dr - 2\,\pi\,\mu\,L\int_0^R\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)^2 r\,dr.$$

Daar nu de eerste term door partieele integratie overgaat in

$$2\pi q L \int_0^R \bar{u}\, r\, dr,$$

ziet men gemakkelijk dat $\varrho \int M\, dr$, en dus (26), den arbeid per tijdseenheid voorstelt van het drukverschil $q\,L$, verminderd met het deel van dezen arbeid dat dient om de met $\frac{d\bar{u}}{dr}$ evenredige wrijving te overwinnen.

In (26) heeft men dus het deel van den arbeid dat dient om de wrijving bij de wervelbeweging te overwinnen, hetgeen dan ook met de vergelijking (21) in overeenstemming is. Volgens eene bekende stelling is nl. $-\mu \int N\, dr$ de negatieve arbeid der laatstgenoemde wrijving.

Zijn er geene wervels, dan moet natuurlijk (26) verdwijnen, en dit is inderdaad het geval daar dan $\bar{u}$ evenredig met $R^2 - r^2$ is.

Zoodra echter wervels zijn ontstaan moet (26) noodzakelijk eene positieve waarde hebben. Maken wij nu de onderstelling dat elk element der integraal hetzelfde teeken heeft (terwijl elk element verdwijnt, wanneer u evenredig met $R^2 - r^2$ is), dan kan men als volgt redeneeren.

Uit

$$-\frac{1}{r}\frac{d\bar{u}}{dr} < -\frac{1}{R}\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R}$$

volgt na vermenigvuldiging met $r\,dr$ en integratie van r tot R, waarbij in aanmerking genomen moet worden dat aan den wand $\bar{u} = 0$ is,

$$\bar{u} < -\frac{1}{2R}(R^2 - r^2)\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R}$$

en dus als

$$V = 2\pi \int_0^R \bar{u}\, r\, dr$$

het per tijdseenheid doorgestroomde volume is,

$$V < -\frac{1}{4}\pi R^3 \left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R},$$

of

$$-\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R} > \frac{4\pi V}{R^3}.$$

Daar nu, als $\bar{u}$ evenredig met $R^2 - r^2$ is,

$$-\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R} = \frac{4\pi V}{R^3}$$

wordt, blijkt het dat inderdaad bij eene gegeven waarde van V door de wervels het drukverval aan den wand en dus de weerstand vergroot wordt.

§ 16. Men kan dit nog zonder eenige onderstelling op de volgende wijze inzien.

Wanneer er wervels bestaan is er, om per tijdseenheid een bepaald volume V door de buis te drijven, een arbeid noodig zoowel wegens de wrijving bij de wervels als wegens die, welke bij de hoofdbeweging zelf bestaat. De stelling zal dus bewezen zijn, wanneer men kan aantoonen dat reeds de arbeid, die wegens de laatstgenoemde wrijving vereischt wordt, grooter is dan die, welke noodig zou zijn bij afwezigheid van de wervels. Dit is inderdaad het geval.

Zij u_1 de snelheid der beweging die in dit laatste geval hetzelfde volume door eene doorsnede voert, als de beweging met de snelheid $\bar{u}$.

De arbeid die voor de overwinning der wrijving bij de bewegingen u_1 en $\bar{u}$ vereischt wordt, is evenredig met de integralen

$$I = \int_0^R \left(\frac{du_1}{dr}\right)^2 r\,dr \quad \text{en} \quad I' = \int_0^R \left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)^2 r\,dr.$$

Wij hebben dus te bewijzen dat

$$I' > I$$

is.

Stel

$$\bar{u} = u_1 + u_2;$$

dan is:

$$I' = I + 2\int_0^R \frac{du_1}{dr}\,\frac{du_2}{dr}\,r\,dr + \int_0^R \left(\frac{du_2}{dr}\right)^2 r\,dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Nu is u_1 evenredig met $R^2 - r^2$; dus, als men onder C eene constante verstaat,

$$\frac{du_1}{dr} = C\,r.$$

Derhalve:

$$\int_0^R \frac{du_1}{dr}\ \frac{du_2}{dr}\ r\,d\,r = C\int_0^R \frac{du_2}{dr} r^2\,d\,r = C\left| u_2\,r^2 \right|_{r=0}^{r=R} - 2\ C\int_0^R u_2\,r\,dr.$$

Dit verdwijnt omdat aan den wand $\bar{u} = 0$, $u_1 = 0$, en dus $u_2 = 0$ is, terwijl uit de gelijkheid der in de twee beschouwde gevallen doorstroomende hoeveelheden volgt

$$\int_0^R u_2\,r\,d\,r = 0.$$

De formule (27) gaat dus over in

$$I' = I + \int_0^R \left(\frac{du_2}{dr}\right)^2 r\,d\,r$$

en daar de laatste term hier positief is, heeft men

$$I' > I, \text{ q. e. d.}$$

De hier bewezen stelling kan ook onmiddellijk uit een bekend theorema [1]) worden afgeleid, wanneer men dit toepast op de ruimte tusschen twee doorsneden der buis en, wat deze doorsneden betreft, eenigszins andere voorwaarden invoert dan gewoonlijk.

Scheikunde. De Heer Bakhuis Roozeboom doet namens Dr. E. Cohen eene mededeeling over: „*Eene proeve van verklaring der afwijkingen van het normale verloop van scheikundige reakties in oplossingen.*"

Uit kinetische beschouwingen kan afgeleid worden dat het aantal molekulen eener stof, hetwelk zich onder overigens gelijke omstandigheden omzet, evenredig is aan de aanwezige hoeveelheid. Op grond hiervan is het mogelijk de snelheid eener reactie aan te duiden met behulp eener zoogenaamde snelheidskonstante k, die onafhankelijk zou moeten zijn van den graad der omzetting. Bij tal van processen bleek evenwel deze constante in vrij sterke mate van de concentratie afhankelijk.

[1]) Korteweg. Versl. en Meded. 2e Reeks. XVIII, p. 348.