Natuurkunde. — De Heer LORENTZ doet eene mededeeling: „*Het verband tusschen hoeveelheid van beweging en energiestroom. Opmerkingen over den bouw van electronen en atomen.*" I.

§ 1. Zooals men weet wordt eene op de z-as betrekking hebbende relativiteitstransformatie voorgesteld door de vergelijkingen

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = a\,z - b\,c\,t,\ t' = a\,t - \frac{b}{c} z, \quad \ldots \quad (1)$$

waarin c de lichtsnelheid is, terwijl a en b constanten zijn, tusschen welke de betrekking

$$a^2 - b^2 = 1 \quad \ldots \quad (2)$$

bestaat, en van welke de eerste positief moge zijn. Bij die vergelijkingen behooren de volgende transformatieformules [1]) voor de spanningen X_x, X_y, enz., de componenten g_x, g_y, g_z van de per volume eenheid bestaande hoeveelheid van beweging, de componenten s_x, s_y, s_z van den energiestroom en de energie ε per volume-eenheid: [2])

$$X'_x = X_x,\quad Y'_y = Y_y,\quad X'_y = X_y,\quad Y'_x = Y_x, \quad \ldots \quad (3)$$

$$X'_z = a\,X_z + b\,c\,g_x,\qquad Y'_z = a Y_z + b\,c\,g_y, \quad \ldots \quad (4)$$

$$Z'_x = a\,Z_x + \frac{b}{c} s_x,\qquad Z'_y = a\,Z_y + \frac{b}{c} s_y, \quad \ldots \quad (5)$$

$$Z'_z = a^2 Z_z + \frac{a\,b}{c} s_z - a\,b\,c\,g_z - b^2\,\varepsilon, \quad \ldots \quad (6)$$

$$g'_x = a\,g_x + \frac{b}{c} X_z,\qquad g'_y = a\,g_y + \frac{b}{c} Y_z, \quad \ldots \quad (7)$$

$$g'_z = a^2\,g_z + \frac{a\,b}{c} Z_z - \frac{a\,b}{c}\varepsilon + \frac{b^2}{c^2} s_z, \quad \ldots \quad (8)$$

$$s'_x = a\,s_x + b\,c\,Z_x,\qquad s'_y = a\,s_y + b\,c\,Z_y, \quad \ldots \quad (9)$$

$$s'_z = a^2\,s_z + a\,b\,c\,Z_z - a\,b\,c\,\varepsilon + b^2\,c^2\,g_z, \quad \ldots \quad (10)$$

$$\varepsilon' = a^2\,\varepsilon - a\,b\,c\,g_z - \frac{a\,b}{c} s_z - b^2\,Z_z \quad \ldots \quad (11)$$

---

[1]) Men komt tot deze formules het gemakkelijkst als men van de transformatievergelijkingen der algemeene relativiteitstheorie (van welke overigens in deze mededeeling geen sprake is) uitgaat.

[2]) Voor de hoeveelheid van beweging en de energie van een stelsel of een lichaam zullen wij G en E schrijven.

Volgens de relativiteitstheorie bestaan tusschen de spannings-energie-componenten de betrekkingen

$$X_y = Y_x \, . \qquad Y_z = Z_y \, , \qquad Z_x = X_z \, ,$$

$$s_x = c^2 g_x \, , \qquad s_y = c^2 g_y \, , \qquad s_z = c^2 g_z \, , \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

en wel in *elk* coördinatenstelsel; de transformatieformules brengen mede dat zij in het stelsel x', y', z', t' gelden als er in het stelsel x, y, z, t aan voldaan is.

Van deze betrekkingen zijn de eerste drie van ouds bekend. Daarentegen is het door (12) uitgedrukte verband tusschen de hoeveelheid van beweging en den energiestroom (in vectorschrijfwijze $s = c^2 g$) welk verband men het eerst in het geval van het electromagnetisch veld heeft leeren kennen, karakteristiek voor de relativiteitstheorie. Op het standpunt der vroegere natuurkunde moet men het zelfs bevreemdend vinden, daar men in menig geval bij eerste overweging in het geheel niet aan een samenhang tusschen de genoemde grootheden zou denken. Misschien zal het goed zijn, voor wij van de in herinnering gebrachte betrekkingen gebruik maken bij eenige beschouwingen over de structuur van electronen en atomen (§ 6), de vergelijkingen (12) met een paar voorbeelden toe te lichten.

§ 2. Wij beschouwen vooreerst een gasmassa waarvan de molekulen als stoffelijke punten kunnen worden behandeld. Wij verdeelen de deeltjes in groepen, elk door een bepaalde snelheid gekenmerkt, en schrijven N voor het aantal deeltjes van een groep per volume-eenheid, m voor de massa van een molekuul [1]), v_x, v_y, v_z voor de componenten der snelheid v. Een sommatie over de verschillende groepen duiden wij door het teeken Σ aan. Daar de component der hoeveelheid van beweging van een molekuul in de richting der z-as

$$\frac{m\, v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

is, heeft men

$$g_z = \Sigma \frac{m\, N\, v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Het aantal tot een bepaalde groep behoorende deeltjes die door een vlakte-element loodrecht op de z-as gaan, bedraagt per vlakte-eenheid en tijdseenheid Nv_z, en daar elk deeltje een energie

[1]) Met „massa” wordt steeds de „MINKOWSKI'sche” massa bedoeld, die voor elk lichaam of deeltje een constante waarde heeft onafhankelijk van de keus van het coördinatenstelsel. Zij kan als maat voor de „hoeveelheid materie” worden aangezien.

$$\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

bezit, heeft men

$$s_z = \Sigma \frac{m\,N\,c^2\,v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

wat inderdaad gelijk aan $c^2 g_z$ is.

Men merke op dat deze uitkomst bepaaldelijk hieraan te danken is, dat aan een deeltje, zelfs als het in het geheel geen snelheid bezit, toch nog een zekere energie, ten bedrage van mc^2, wordt toegeschreven. Dientengevolge zal, ook wanneer deeltjes met een uiterst kleine snelheid v door het beschouwde vlak gaan, daaraan een transport van energie gelijk aan c^2 maal de hoeveelheid van beweging per volume-eenheid beantwoorden, terwijl volgens de oude physica nauwelijks een energiestroom bestaan zou. Immers, hij zou evenredig met $v^2\,v_z$ zijn.

In andere gevallen zou men naar de vroegere opvattingen wel aan een energiestroom, maar niet aan eene hoeveelheid van beweweging denken. Als b.v. de uiteinden van een cilindervormige gasmassa op verschillende standvastige temperaturen worden gehouden, ontstaat een stationaire toestand met een energiestroom, nl. de warmtegeleiding, maar op het eerste gezicht zonder hoeveelheid van beweging, daar er geen strooming in het gas plaats heeft. Inderdaad brengt de stationaire toestand mede, dat door een doorsnede van de kolom, waarvan wij ons de lengte volgens de z-as gericht denken, evenveel moleknlen naar den eenen als naar den anderen kant gaan, en dit vereischt dat $\Sigma\,Nv_z = 0$ en dus ook $\Sigma\,Nmv_z = 0$ is, wat volgens de oude mechanica wil zeggen dat de resulteerende hoeveelheid van beweging nul is. In de relativiteitsmechanica blijven deze vergelijkingen gelden, maar niettemin kan nu zeer goed de door (13) bepaalde hoeveelheid van beweging van 0 verschillend zijn. Dit geval zal zich juist bij het ondersteldc temperatuurverschil voordoen. Immers, wanneer de temperatuur het hoogst is aan de zijde der negatieve z, zoodat de energiestroom de positieve richting heeft, dan zullen de deeltjes die naar den positieven kant gaan, over het geheel grooter snelheid hebben dan die, welke zich naar de negatieve zijde bewegen. Met positieve waarden van v_z zullen kleinere waarden van $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ gepaard gaan dan met negatieve waarden van v_z; zoo kan (13) een positieve waarde hebben, al is $\Sigma \, N m \, v_z$ nul.

§ 3. In de tweede plaats verbeelden wij ons een lange en dunne veerkrachtige staaf, die in het coördinatenstelsel x, y, z in rust is, met de lengte volgens de z-as en die door krachten in de richting der lengte op de uiteinden werkende wordt uitgerekt. Wij stellen ons voor dat deze krachten K, steeds gelijk aan elkaar zijnde, zeer langzaam van 0 af tot een waarde K_1, die zij dan verder behouden, aangroeien; de staaf in zijn geheel genomen, krijgt daarbij geen snelheid. Is de lengte oorspronkelijk l en op eenig oogenblik gedurende de uitrekking $l\,(1+\sigma)$, dan zal tusschen de dilatatie σ en de kracht K een bepaald, van den aard van het materiaal afhankelijk verband bestaan [1]), stel

$$K = f(\sigma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

en men heeft, als aan K_1 de waarde σ_1 beantwoordt, voor den door de krachten bij het uitrekken verrichten arbeid

$$l \int_0^{\sigma_1} K \, d\sigma .$$

Zij verder ϱ_0 de massa per lengte-eenheid voor de ongerekte staaf. Dan is het aanvankelijke arbeidsvermogen (verg. (14)) $l \varrho_0 c^2$ en dus na de uitrekking de energie per lengte-eenheid, als

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1+\sigma_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

de dichtheid in den gerekten toestand is,

$$\varepsilon = \varrho \, c^2 + \frac{1}{1+\sigma_1} \int_0^{\sigma_1} K \, d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

De beteekenis die ε hier heeft, wijkt in zooverre van de vroegere (§ 1) af, dat nu de energie per lengte-eenheid en niet per volume-eenheid, bedoeld is. Wij zullen, overeenkomstig daarmede, onder g_z de hoeveelheid van beweging per lengte-eenheid verstaan, onder Z_z de spanning over de geheele doorsnede, en onder s_z den energiestroom door de volle doorsnede.

Wij zullen nu den toestand van de staaf beschrijven in het stelsel x', y', z', t', waartoe wij door de transformatie (1) overgaan. Daarbij verandert de doorsnede niet en wij kunnen dus bij de nieuwe

[1]) Het is niet noodig in de volgende beschouwingen de grootheid σ oneindig klein te onderstellen.

beteekenis die wij aan $Z_z, g_z, s_z, \varepsilon$ en, in overeenstemming daarmede aan $Z'_z, g'_z, s'_z, \varepsilon'$ geven, nog steeds van de formules (6), (8), (10) en (11) gebruik maken.

In het nieuwe stelsel heeft de staaf een snelheid

$$v' = -\frac{b\,c}{a}. \qquad (18)$$

in de richting der z'-as en een lengte

$$l' = l\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}.$$

Substitueeren wij nu voor ε, Z_z, g_z en s_z de waarden (17), K, 0 en 0, voeren wij de nieuwe massa per lengte-eenheid

$$\varrho' = \frac{\varrho}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad (19)$$

in en laten wij ten slotte de accenten en den index 1 weg, dan komt er

$$Z_z = K - v^2\,Q, \qquad g_z = v\,Q, \qquad s_z = c^2\,v\,Q, \qquad (20)$$

$$\varepsilon = K + c^2\,Q, \qquad (21)$$

waarbij ter bekorting

$$Q = \frac{\varrho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{c^2 - v^2}\left(-K + \frac{1}{1+\sigma}\int_0^\sigma K\,d\sigma\right). \qquad (22)$$

gesteld is.

Wij merken hierbij op dat σ uit de massa ϱ per lengte-eenheid en de waarde ϱ_0 die deze in de stilstaande en niet gerekte staaf heeft, kan worden gevonden door de uit (16) en (19) volgende formule

$$\sigma = \frac{\varrho_0}{\varrho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1. \qquad (23)$$

Met behulp van (15) kunnen dan ook K en $\int_0^\sigma K d\sigma$ worden berekend. Derhalve worden door (20), (21) en (22) de spanning, de hoeveelheid van beweging, de energiestroom en de energie in de zich bewegende en gerekte staaf als functiën van de snelheid en de dichtheid voorgesteld.

Daarbij hebben, zooals uit de transformatieformules voor krachten blijkt [1]), de op de uiteinden werkende krachten nog altijd de grootte K.

Dat de spanning Z_z daarvan verschilt, ligt hieraan dat die grootheid op een *stilstaand* vlak, loodrecht op de z-as, betrekking heeft, en dat in de grootte ervan niet alleen de kracht K begrepen is, die het aan de positieve zijde van dat vlak liggende deel der staaf op het deel aan de negatieve zijde uitoefent, maar bovendien de hoeveelheid van beweging, van het geschikte teeken voorzien, die bij de verschuiving der staaf door het vlak heen gaat. Men vindt voor die hoeveelheid van beweging $-vg_z$ en werkelijk levert de tweede der uitdrukkingen (20), met $-v$ vermenigvuldigd en bij K opgeteld, de waarde (20) van Z_z op.

Op een dergelijke wijze kan men van den energiestroom s_z rekenschap geven. Daarin zijn n.l. begrepen de arbeid $-vK$ die het aan de negatieve zijde liggende deel van de staaf op het deel aan de positieve zijde per tijdseenheid uitoefent, en de bij de beweging der staaf door het vlak heen per tijdseenheid getransporteerde energie, waarvan het bedrag $v\,\varepsilon$ is.

Men kan overigens de vergelijkingen (20) en (21) ook verkrijgen door, terwijl men zich van het stelsel x', y', z', t' bedient, het uitrekken der staaf in het oog te vatten. Daartoe heeft men slechts de mathematische beschrijving van de in het begin dezer § aangegeven bewerking getrouw in het stelsel x', y', z', t' over te brengen, en dan in dat stelsel uit de krachten en hun arbeid de verandering van de hoeveelheid van beweging en de energie af te leiden.

§ 4. De betrekkingen (20) en (21) kunnen dienen om de bewegingsvergelijkingen op te stellen voor een staaf bij welke ϱ en v langzaam van punt tot punt veranderen, zoo langzaam n.l. dat de afstand over welken een merkbare verandering plaats heeft, zeer groot is in vergelijking met de afmetingen der doorsnede. Men kan dan twee op den oneindig kleinen afstand dz van elkaar liggende vaste platte vlakken P_1 en P_2 loodrecht op de z-as beschouwen, en uitdrukken dat de verandering der tusschen die vlakken liggende hoeveelheid materie bepaald wordt door de hoeveelheden die door

---

[1]) Deze formules hebben nl. den vorm

$$\frac{F'_x}{\sqrt{c^2-v'^2}}=\frac{F_x}{\sqrt{c^2-v^2}}\ ,\quad \frac{F'_y}{\sqrt{c^2-v'^2}}=\frac{F_y}{\sqrt{c^2-v^2}},$$

$$\frac{F'_z}{\sqrt{c^2-v'^2}}=a\frac{F_z}{\sqrt{c^2-v^2}}-\frac{b}{c\sqrt{c^2-v^2}}(v_x F_x+v_y F_y+v_z F_z).$$

Stelt men in de laatste vergelijking $v=0$, $F_x=F_y=0$, $F_z=K$ en voor v' de waarde (18), dan vindt men $F'_z=K$.

P_1 en P_2 heengaan, en dat evenzoo de verandering der hoeveelheid van beweging tusschen P_1 en P_2 door de waarden van de spanning aan die vlakken, en de verandering der energie door de waarden van den energiestroom bepaald wordt. Men komt daardoor tot drie vergelijkingen, nl.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial z} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

en

$$\frac{\partial g_z}{\partial t} = \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial s_z}{\partial z},$$

of wel

$$\frac{\partial (v Q)}{\partial t} + \frac{\partial (v^2 Q - K)}{\partial z} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

$$\frac{\partial (c^2 Q + K)}{\partial t} + \frac{\partial (c^2 v Q)}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

Hieraan moet nog het door (15) en (23) uitgedrukte verband tusschen K, ϱ en v, alsmede de voorwaarden aan de uiteinden, b.v. dat daar de kracht K of de snelheid v een voorgeschreven waarde heeft, worden toegevoegd. Met elkander bepalen de vergelijkingen hoe zich longitudinale golven over de staaf kunnen voortplanten; zij kunnen ook dienen om in bijzonderheden na te gaan hoe de staaf door een kracht die eenigen tijd, b.v. op een der uiteinden werkt, in beweging wordt gebracht, en hoe daarbij door een tijdelijk verschil in de snelheden der eindpunten de door den factor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ bepaalde contractie tot stand komt.

Daar de toestand der staaf in elk punt door de twee grootheden ϱ en v bepaald is, kunnen er slechts twee van elkaar onafhankelijke differentiaalvergelijkingen zijn. Inderdaad kan men een van de vergelijkingen (24), (25) en (26) uit de beide andere afleiden.

§ 5. In sommige gevallen is het moeilijk, zich door eenvoudige beschouwingen van de geldigheid der betrekkingen (12) te overtuigen. Als b.v. een veerkrachtige bol met zekere snelheid tegen een daaraan gelijken, eerst stilstaanden bol botst en aan dezen zijn geheele beweging afstaat, is er zeker een energiestroom door het vaste vlak, dat op het oogenblik der botsing beide bollen raakt, maar men ziet niet aanstonds hoe daaraan een hoeveelheid van beweging beantwoordt. Een dergelijke moeilijkheid doet zich voor als men de warmtegeleiding wil interpreteeren, niet voor een zeer verdund gas zooals in § 2 beschouwd werd, maar in gevallen waarin de overdracht van energie bij de botsingen een merkbaar deel van het verschijnsel uitmaakt. Men zal in zulke gevallen, in welke de onderlinge werkingen der molekulen in het spel komen, moeten aannemen dat de betrekkingen (12) in elk punt der molekulaire krachtvelden, ook wanneer deze misschien niet van electromagnetischen aard zijn, gelden; is dit het geval, dan zullen zij ook doorgaan als men, met de analyse minder diep gaande, zoowel bij g als bij s aan gemiddelden denkt over uitgestrektheden die groot zijn in vergelijking met de molekulaire afmetingen.

In verband met deze opmerkingen moge erop gewezen worden, dat de relativiteitsmechanica ons ertoe dwingt, alle energie te *localiseeren*; het is b.v. geheel uitgesloten, dat wij de potentieele energie van twee elkaar aantrekkende lichamen beschouwen als een mathematische grootheid die geen andere beteekenis heeft dan dat zij met de kinetische energie een standvastige som oplevert. Evenals aan de energie wordt ook aan de hoeveelheid van beweging een bepaalde plaats in de ruimte aangewezen. Zoo leiden de opvattingen van EINSTEIN er toe, diep in het mechanisme der verschijnselen door te dringen.

Kenmerkend voor die opvattingen is ook, dat in de uitdrukking voor de energie nooit een onbepaalde additieve constante voorkomt. Kent men alle bijzonderheden van een stelsel, dan is er in de hoeveelheid van beweging niets onbepaalds. Hetzelfde moet dan ook, wegens den besproken samenhang, van den energiestroom kunnen gezegd worden, en dit sluit een onbepaalde constante in de waarde van de energie uit. Immers, een dergelijke constante zou zich ook doen gevoelen in den energiestroom waarmede men te doen heeft als een stelsel, in translatiebeweging verkeerende, zijn energie medeneemt.

§ 6. Beproeft men, gebruik makende van de begrippen der mechanica, zich in bijzonderheden een voorstelling te maken van de structuur van een electron, dan moet men, behalve de electromagnetische krachten, nog krachten van anderen aard invoeren; bestonden die niet, dan zou het electron door de aan zijn oppervlak werkende, naar buiten gerichte electromagnetische spanningen, of, wat op hetzelfde neerkomt, door de onderlinge afstooting zijner gelijknamig geladen deelen, uiteengerukt worden. Op de vraag naar richting en grootte der bedoelde „supplementaire” krachten, zooals men ze kan noemen, wordt een bepaald antwoord gegeven door een bekende hypothese van POINCARÉ. Volgens deze zou de lading gedragen worden door een gesloten vlies dat uit zich zelf geenerlei weerstand biedt aan een vorm- of grootteverandering, en zouden de spanningen van het omringende electromagnetische veld in evenwicht gehouden worden door een normale trekspanning aan de binnenzijde van het vlies (waar geen electromagnetisch veld is), en wel zou die spanning per vlakte-eenheid steeds dezelfde grootte T hebben, ook dan als het electron zich beweegt en daarbij tot een ellipsoïde wordt afgeplat.

Is e de lading van het deeltje en heeft het in den toestand van rust de gedaante van een bol met den straal R, dan is

$$T = \frac{e^2}{32\,\pi^2 R^4}, \qquad (27)$$

waarvoor men kan schrijven

$$T = \frac{3\,mc^2}{16\,\pi R^3}, \qquad (28)$$

als men de massa

$$m = \frac{e^2}{6\,\pi\,c^2 R}. \qquad (29)$$

invoert. Met deze laatste grootheid hangt ook de energie

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (30)$$

en de hoeveelheid van beweging

$$G = \frac{m\,v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (31)$$

samen.

Het electromagnetische veld van het electron, zich met de snelheid v bewegende en tot een ellipsoïde met de halve assen R, R en $R\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ vervormd, kan gemakkelijk worden bepaald, zoodat men ook de hoeveelheid van beweging in dat veld kan berekenen. Daarbij vindt men juist de waarde (31), en men kan dus besluiten dat de hoeveelheid van beweging geheel van electromagnetischen aard is. Daarentegen vindt men voor de electromagnetische energie niet de waarde (30), maar

$$\tfrac{1}{4}\,m\,c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

minder, men moet zich dus voorstellen dat er tot dit bedrag een energie van niet electromagnetischen aard bestaat. Daar men nu wegens (28) voor onze laatste uitdrukking kan schrijven

$$T\, V,$$

als V het volume $\frac{4}{3}\,\pi\, R^3 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ is, ligt het voor de hand, zich deze „supplementaire" energie als uniform over de inwendige ruimte van het electron verdeeld voor te stellen, en haar in verband te brengen met de spanning T van POINCARÉ. Inderdaad, als binnen het vlies een *potentieele* energie bestaat, en T bij vorm- of volumeveranderingen constant blijft, zal bij variatie van V een arbeid $-\, T\, d\, V$ op het vlies gedaan worden, waaruit men mag besluiten dat er een spanning T werkt.

§ 7 [1]). Het verdient in het bijzonder de aandacht dat aan de spanning van POINCARÉ geen hoeveelheid van beweging, en dus ook geen energiestroom moet beantwoorden. Terwijl de electromagnetische energie die buiten het electron ligt, in de translatiebeweging daarvan deelt, moet men zich voorstellen dat de supplementaire energie in het binnenste op haar plaats blijft. Dit is in overeenstemming met het feit dat, zoo lang een stilstaand ruimte-element $d\, S$ binnen het electron ligt, het steeds dezelfde energie $T\, d\, S$ bevat, en ook hiermede, dat, zoodra het oppervlak van het electron door het element heen gaat, de daarin aanwezige energie overgaat van de waarde $T\, d\, S$ tot de waarde $\varepsilon\, d\, S$ (ε de electromagnetische energie zijnde), die zij buiten het electron heeft, of omgekeerd.

Om dit laatste toe te lichten stellen wij ons voor dat het electron met de snelheid v in de richting der positieve z-as voortgaat en vatten een oppervlakte-element $d\sigma$ aan de voorzijde in het oog. Wij duiden met α, β, γ de hoeken aan, die de naar buiten getrokken normaal met de coördinaatassen maakt, verder met $d\sigma_1$ en $d\sigma_2$ de stilstaande vlakte-elementen waarmede $d\sigma$ aan het begin en het einde van een tijdselement dt samenvalt. Het tusschen $d\sigma_1$ en $d\sigma_2$ begrepen, door $d\sigma$ doorloopen ruimte-element heeft de grootte $v \cos\gamma\, d\sigma\, dt$ en de daarin bevatte energie verandert met

$$(T-\varepsilon)\; v \cos\gamma\; d\sigma\, dt.$$

Daar volgens het gezegde door $d\sigma_1$ geen energiestroom plaats heeft, en men mag afzien van den stroom door het cilindrische oppervlak dat met $d\sigma_1$ en $d\sigma_2$ het volume-element begrenst (daar

[1]) Beschouwingen welke met die van deze § tot op zekere hoogte overeenkomen, vindt men bij J. D. VAN DER WAALS JR., Over de energie en den straal van het electron, dit Zittingsverslag 25 (1917), p. 1109.

dit oppervlak evenredig met dt en dus de daardoor gaande energie evenredig met dt^2) is, moet men hebben

$$(T-\varepsilon)\, v \cos\gamma + s_x \cos\alpha + s_y \cos\beta + s_z \cos\gamma = 0, \quad . \quad . \quad (32)$$

waar s_x, s_y, s_z op een uitwendig punt in de onmiddellijke nabijheid van het oppervlak betrekking hebben.

Om nu deze vergelijking, die, zooals men gemakkelijk inziet, ook aan de achterzijde moet gelden, op de proef te stellen, zullen wij $\varepsilon, s_x, s_y, s_z$ door middel van de transformatieformules afleiden uit de overeenkomstige grootheden voor het stilstaande electron, welke grootheden wij door accenten zullen onderscheiden. [1]) Daar $g'_z = 0$, $s'_z = 0$ is, vindt men

$$\varepsilon = a^2 \varepsilon' - b^2 Z'_z,$$

$$s_x = - b\, c\, Z'_x, \qquad s_y = - b\, c\, Z'_y, \qquad s_z = - a\, b\, c\, Z'_z + a\, b\, c\, \varepsilon',$$

terwijl, aangezien het electron in het stelsel x', y', z', t' stilstaat, de snelheid in het stelsel x, y, z, t, bepaald wordt door

$$v = \frac{b\, c}{a}.$$

Laat nu het beschouwde punt van het oppervlak in het eene stelsel de coördinaten x, y, z, en in het andere de coördinaten x', y', z hebben, telkens ten opzichte van het middelpunt. Uit de vergelijking der ellipsoïde

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = R^2$$

volgt dat in (32) $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ door $x, y, \frac{z}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ d. w. z. door $x', y', \frac{z'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ vervangen mogen worden. Substitueeren wij tevens voor ε, s_x, s_y, s_z en v de aangegeven waarden, dan komt er na eenige herleiding

$$z'\, T = x'\, Z'_x + y'\, Z'_y + z'\, Z'_z,$$

aan welke vergelijking inderdaad voldaan is. Deelt men nl. door R, dan krijgt men in het tweede lid de component Z'_n van de aan

[1]) Wij gebruiken hierbij de formules die men uit (1) en (3) — (11) kan afleiden als men uit die vergelijkingen de niet door accenten onderscheiden grootheden oplost, en die men ook onmiddellijk kan neerschrijven als men in (1) en 3 — (11) de overeenkomstige grootheden met en zonder accenten met elkaar verwisselt en tevens b door $-b$ vervangt.

de buitenzijde van het stilstaande electron werkende electromagnetische spanning. Daar die spanning volgens de normaal gericht is en dezelfde grootte als T heeft, is $Z'_n = \frac{z'}{R} T$.

§ 8. Wij zullen nu nagaan wat wij, het model van POINCARÉ generaliseerende, uit de aangenomen grondstellingen omtrent de structuur van het electron kunnen afleiden, als wij aan de onderstelling vasthouden dat, welk coördinatenstelsel men ook kieze, aan de supplementaire krachten geen hoeveelheid van beweging, en dus ook geen energiestroom beantwoordt.

Vooreerst kan men, nog onafhankelijk van deze onderstelling, opmerken dat de *totale* spannings-energie-componenten aan de transformatieformules (3) — (11) onderworpen zijn, en dat dit ook van de *electromagnetische* grootheden, op zich zelf beschouwd, geldt. Wij kunnen dus ook van die formules gebruik maken wanneer wij, zooals wij nu zullen doen, onder X_x, X_y, enz. de *supplementaire* spannings-energie-componenten verstaan. Zal nu zoowel in het stelsel x, y, z, t, als in x', y', z', t' de energiestroom nul zijn, dan moet men volgens (9) en (10) hebben.

$$Z_x = 0 \quad , \quad Z_y = 0 \quad , \quad Z_z = \varepsilon,$$

waardoor dan ook blijkens (5) en (6)

$$Z'_x = 0 \quad , \quad Z'_y = 0 \quad , \quad Z'_z = \varepsilon$$

wordt.

Men kan echter een dergelijke redeneering toepassen als men van een relativiteitstransformatie met betrekking tot de x- of de y-as gebruik maakt; men komt dan tot het besluit dat in het stelsel x, y, z, t ook de overige tangentieele spanningen 0 zijn, en dat, evenals Z_z, ook X_x en Y_y de waarde ε hebben. Hetzelfde geldt dan blijkens (3) en (4) in het stelsel x', y', z', t', terwijl bovendien de vergelijking (11) ons leert dat $\varepsilon' = \varepsilon$ is.

Derhalve bestaat in ieder punt van het electron een in alle richtingen even groote normale spanning T, waarvan de grootte door hetzelfde getal wordt voorgesteld als de energie per volume-eenheid; bovendien is dat getal onafhankelijk van de keus van het coördinatenstelsel. Deze conclusies gelden hoe het electron zich moge bewegen, en hoe het daarbij, en door de werking van uitwendige electromagnetische krachten moge gedeformeerd worden.

§ 9. Wij zullen ons voorstellen dat de lading van het electron met eindige ruimtedichtheid ϱ verdeeld is en vatten een bepaald punt dier lading in het oog. Zulk een punt, dat aan de beweging van het electron deelneemt, kunnen wij een „substantieel" punt noemen en in denzelfden zin kunnen wij van een substantieel volume-element spreken. Wij zullen aantoonen dat in een bepaald substantieel punt T voortdurend dezelfde waarde heeft.

Zij nl. F_e de electromagnetische en F_s de supplementaire kracht, op een substantieel volume-element werkende, en zij dS een vaststaand ruimte-element waarmede dat substantieele volume-element op het beschouwde oogenblik samenvalt. Wij verstaan onder A_e den arbeid per tijdseenheid van F_e, onder A_s dien van F_s, onder E_e en E_s de in het element dS liggende electromagnetische en supplementaire energie, en eindelijk onder θ de door het oppervlak van dS naar binnen stroomende electromagnetische energie. Dan is, daar er geen supplementaire energiestroom is

$$A_e + A_s + \frac{\partial E_e}{\partial t} + \frac{\partial E_s}{\partial t} = \theta,$$

en daar volgens een bekende stelling

$$A_e + \frac{\partial E_e}{\partial t} = \theta$$

is,

$$A_s = -\frac{\partial E_s}{\partial t},$$

wat niet anders wil zeggen dan dat de arbeid der in zeker ruimte-element $d\,S$ werkende supplementaire kracht verricht wordt ten koste van de *in dat element* bevatte supplementaire energie.

Daar nu, als v_x, v_y, v_z de snelheidscomponenten zijn,

$$A_s = \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) dS$$

en

$$E_s = T\, dS$$

is, vindt men

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

waarmede het gestelde bewezen is.

Om nu eens voor al de waarde van T in elk substantieel punt te kennen, is het voldoende de berekening te doen voor het geval dat het electron in rust is en onttrokken aan alle uitwendige krachten. Stel dat dan, binnen een bol met den straal R, de lading symmetrisch rondom het middelpunt verdeeld is, zoodat ϱ een functie is van den afstand r tot het middelpunt. Dan is de electrische potentiaal

$$\varphi = \frac{1}{r}\int_0^r r^2 \varrho \, dr + \int_r^R r\varrho \, dr$$

en uit de evenwichtsvoorwaarde

$$-\varrho \frac{d\varphi}{dr} + \frac{dT}{dr} = 0$$

volgt

$$T = \int_R^r \varrho \frac{d\varphi}{dr} dr = \int_r^R \frac{\varrho}{r^2} dr \int_0^r r^2 \varrho \, dr, \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

daar wij mogen aannemen dat T aan het oppervlak verdwijnt.

Voor het arbeidsvermogen E, de som van de electrische energie $\frac{1}{2}\int \varrho \varphi \, dS$ en de supplementaire energie $\int T \, dS$ vindt men na eenige herleiding

$$E = \frac{16}{3}\pi \int_0^R r^2 \varrho \, dr \int_r^R r\varrho \, dr. \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

Het behoeft nauwelijks gezegd te worden dat de voorstellingswijze van Poincaré als een bijzonder geval in de hier uiteengezette begrepen is. Trekt zich de lading e meer en meer in een dunne schil aan het oppervlak van den bol samen, waarover zij gelijkmatig verdeeld is, dan nadert (34) tot de waarde $\frac{e^2}{6\pi R}$, die men ook uit (30) en (29) vindt, terwijl uit (33) volgt dat overal binnen de schil een spanning van de door (27) bepaalde grootte bestaat.

§ 10. Gebruik makende, hetzij van de voorstellingswijze van Poincaré, hetzij van de meer algemeene die in de laatste twee §§ besproken is, zou men nu met inachtneming van de supplementaire krachten in bijzonderheden kunnen nagaan hoe een electron in verschillende gevallen in beweging gebracht en gedeformeerd wordt, als niet het groote bezwaar bestond, dat de toestand dien wij beschouwd hebben, labiel is. Wat het model van Poincaré betreft, is dit reeds lang geleden door Abraham opgemerkt, en in het algemeen blijkt het op de volgende wijze.

Daar men bij een stilstaand electron zoowel het electrische als het supplementaire arbeidsvermogen als potentieele energie kan beschouwen, zal de in de vorige § beschouwde evenwichtstoestand alleen dan stabiel zijn, als de door E voorgestelde som een minimum is.

Stel nu dat het bolvormige electron door homogene dilataties of contracties volgens drie onderling loodrechte middellijnen, overgaat in een ellipsoïde met de halve assen $(1+\lambda) R$, $(1+\mu) R$ en $(1+\mu) R$; daarbij is de bedoeling dat λ en μ kleine grootheden zijn, waarvan wij de tweede machten en het product zullen behouden, en dat elk substantieel volume-element zijn lading behoudt. Men kan dan de verandering van het electrische arbeidsvermogen met behulp van bekende regels berekenen en die van het supplementaire arbeidsvermogen hieruit afleiden, dat in elk substantieel volume-element T hetzelfde blijft. Daaruit volgt dat de supplementaire energie van een dergelijk element evenredig met de grootte daarvan verandert, dus in reden van 1 tot $(1+\lambda)(1+\mu)^2$. Voert men de berekeningen uit, dan vindt men dat de geheele energie E in reden van 1 tot

$$1+\frac{1}{10}\lambda^2+\frac{4}{5}\lambda\mu+\frac{3}{5}\mu^2$$

verandert. Daar nu de som der laatste drie termen negatief is als λ ligt tusschen $-(4+\sqrt{10})\mu$ en $-(4-\sqrt{10})\mu$, was het evenwicht niet tegenover alle vormveranderingen stabiel.

Het ligt voor de hand te denken dat men, om deze moeilijkheid te ontgaan, het bestaan ook van een supplementaire hoeveelheid van beweging zal moeten aannemen. Uit een vervolg op deze mededeeling zal blijken dat daar niets tegen is en men zal er te minder bezwaar tegen kunnen hebben, nu toch reeds met de supplementaire spanning T en de daaraan beantwoordende energie grootheden zijn ingevoerd, die niet van electromagnetischen aard zijn.
