

## ALTE UND NEUE FRAGEN DER PHYSIK <sup>1)</sup>

### ERSTER VORTRAG

#### *Über die Entwicklung unserer Vorstellungen vom Äther*

Bei den älteren Physikern war über die Auffassung des Äthers kein Zweifel; er wurde als eine Art gewöhnlicher Materie angesehen, von dieser nur verschieden durch die Werte seiner physikalischen Konstanten, z.B. Elastizität und Dichte, und es galt als ausgemacht, dass sich alle Vorgänge in ihm nach den Gesetzen der Mechanik erklären lassen müssten. Ein Vertreter dieses Standpunktes ist HUYGENS, der die grosse Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes auf die Grösse der elastischen Kräfte der Ätheratome zurückführt; NEWTON konnte sich das Eindringen der Wärmestrahlen in evakuierte Gefässe nur durch das Vorhandensein eines materiellen Mediums erklären. Auch FRESNEL fusst noch ganz auf dieser Anschauung; durch seine Interferenzversuche mit polarisiertem Licht, welche die Transversalität der Lichtschwingungen bewiesen, wurde er aber gezwungen, die bis dahin anerkannte Vorstellung eines flüssigen Äthers (Fluidum-Theorie) durch die kühne Hypothese eines festen elastischen Äthers zu ersetzen. Die Frage nach der Existenz longitudinaler Schwingungen ist auch später noch aufgetaucht; RÖNTGEN zog die Möglichkeit in Betracht, seine  $x$ -Strahlen auf diese Weise zu erklären, eine Vermutung, die nach den Geschwindigkeitsmessungen dieser Strahlen durch MARX und den Beobachtungen über ihre Polarisation und die der Sekundärstrahlen durch BARKLA, HAGA u.a. sich als unhaltbar erwiesen hat.

Auf die Entwicklung der Lehre vom mechanischen Lichtäther,

---

<sup>1)</sup> Wolfskehlvorträge von 24 bis 29 Oktober 1910. Das von LORENTZ durchgesehene Referat ist von M. BORN verfasst worden. Phys. Zeitschrift. 11, 1234, 1910.

an der Männer wie F. E. NEUMANN, GREEN, CAUCHY, KIRCHHOFF u.a. hervorragenden Anteil hatten, geht LORENTZ nicht näher ein, sondern wendet sich zu der Lichttheorie von MAC CULLAGH, die als Vorläuferin der elektromagnetischen Theorie anzusehen ist. Nach MAC CULLAGH hängt die potentielle Energie  $U$  des Äthers nicht von den Verzerrungen, sondern von den Verdrehungen  $u$  der Volumelemente des Äthers ab, die mit den Verschiebungen  $q$  durch die Vektorformel

$$u = \frac{1}{2} \text{rot } q$$

zusammenhängen; es ist für ein kristallinisches Medium allgemein zu setzen (pro Volumeinheit)

$$U = \frac{1}{2} (k_{11} u_x^2 + \dots + 2k_{12} u_x u_y + \dots)$$

und für isotrope Körper

$$U = \frac{1}{2} k u^2;$$

die kinetische Energie beträgt

$$T = \frac{1}{2} l \dot{q}^2,$$

wo  $l$  die Dichte bedeutet.

Mit der Aufstellung der *elektromagnetischen Lichttheorie* ist die Frage nach der Natur des Äthers in eine neue Phase getreten, da er jetzt nicht nur als Träger der schnellen Lichtwellen, sondern auch der statischen und langsam veränderlichen Felder erscheint. *Die Grundgleichungen der Maxwell'schen Theorie des reinen Äthers* verknüpfen die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  mit der magnetischen  $\mathfrak{H}$  folgendermassen:

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{E}},$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}},$$

( $c$  = Lichtgeschwindigkeit).

Handelt es sich um die mechanische Erklärung der hierdurch dargestellten elektromagnetischen Erscheinungen überhaupt, so wird man diese Relationen etwa mit den MAC CULLAGHSchen in Beziehung zu bringen suchen. Aus den oben angegebenen Formeln von MAC CULLAGH ergeben sich für den isotropen Äther

mit Hilfe des HAMILTONSchen Prinzips folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{q} &= 2 \dot{u}, \\ \operatorname{rot} u &= -\frac{2l}{k} \ddot{q}. \end{aligned}$$

$$\left( c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{l}} = \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit} \right).$$

Man kann diese mit den MAXWELLSchen Gleichungen auf zwei Arten zur Übereinstimmung bringen, indem man setzt ( $v$  Konstante):

$$\mathfrak{E} = v \dot{q}, \quad \mathfrak{C} = 2vcu,$$

oder

$$\mathfrak{C} = v \dot{q}, \quad \mathfrak{E} = -2vcu.$$

Diesen beiden Ansätzen entsprechen zwei mechanische Deutungen der electromagnetischen Vorgänge: Man kann die elektrische Kraft als Geschwindigkeit einer Ätherströmung in der Richtung der Kraftlinien ansehen und die magnetische Kraft als Drehung der Volumelemente um die Kraftlinien (wo dann die elektrisch Energie als kinetische, die magnetische als potentielle aufzufassen ist) — oder umgekehrt. Beide Bilder sind zulässig und gleichberechtigt, wenn es sich um ein Lichtbündel handelt, aber beide führen zu grossen Schwierigkeiten, sobald man sie auf statische Zustände anzuwenden versucht. So erfordert z.B. in dem ersten Bilde die Beschreibung des elektrostatischen Feldes einer geladenen Kugel die Annahme, dass der Äther fortwährend aus der Kugel aus- oder in sie einströmt, entsteht oder verschwindet; in dem zweiten Bilde aber hat man in diesem einfachen Fall Rotationen der Volumelemente anzunehmen, die mathematisch unmöglich sind. WITTE hat gezeigt, dass überhaupt jede mechanische Erklärung, in der man den Äther als ein Kontinuum voraussetzt, als ausgeschlossen zu betrachten ist. Allerdings ist eine solche Erklärung denkbar, wenn man den Äther aus diskreten Teilchen gebildet annimmt.

Von grosser Bedeutung ist der Umstand, dass der Äther als vollkommen durchdringlich angesehen werden muss; denn es muss als erwiesen gelten, dass die Lichtfortpflanzung durch die Bewegung der Himmelskörper nicht merklich beeinflusst, also

der Äther von ihnen nicht mitgeführt wird. Diese von FRESNEL aufgestellte *Hypothese des ruhenden Äthers* bildet auch das Fundament der *Elektronentheorie*, wie sie von WIECHERT, LARMOR und LORENTZ ausgebildet worden ist. Ihre Grundgleichungen lauten

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathfrak{d} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mathfrak{h} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{h} &= \frac{1}{c} (\dot{\mathfrak{d}} + \rho \mathfrak{v}), \\ \operatorname{rot} \mathfrak{d} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{h}};\end{aligned}$$

hier bedeuten  $\mathfrak{d}$  die dielektrische Verschiebung,  $\mathfrak{h}$  die magnetische Kraft,  $\rho$  die Ladungsdichte und  $\mathfrak{v}$  die Geschwindigkeit der Ladung;  $\dot{\mathfrak{d}}$ , der MAXWELLSche Verschiebungsstrom, und  $\rho \mathfrak{v}$ , der Konvektionsstrom, setzen den gesamten elektrischen Strom zusammen. Dazu kommt die Relation, welche die auf die Ladungen (Elektronen) ausgeübte mechanische Kraft angibt, und zwar ist diese für die Einheit der Ladung

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{d} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}].$$

Aus diesen Grundgleichungen lässt sich ein dem HAMILTONSchen Prinzip sehr analoger Satz ableiten. Erteilt man nämlich den Ladungen virtuelle Verschiebungen und variiert gleichzeitig den Vektor  $\mathfrak{d}$ , derart, dass die erste Grundgleichung bestehen bleibt, so kommt man zu der Vorstellung eines variierten elektromagnetischen Vorganges, und es gilt, wenn man für diesen die magnetische Energie in sachgemässer Weise bestimmt,

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \delta(T - U) - \delta E \} dt = 0,$$

wobei  $\delta T$ ,  $\delta U$  die Variationen der magnetischen und elektrischen Energie,  $\delta E$  die virtuelle Arbeit der Feldkräfte bei der Verrückung der Ladungen bedeuten und alle Variationen zu den Zeiten  $t_1$ ,  $t_2$  verschwinden.

Diese Formel, die sich mit der entsprechenden der Mechanik noch besser in Einklang bringen lässt durch Einführung der Arbeit  $\delta A = -\delta E$  der auf die Ladungen wirkenden äusseren Kräfte, die, wenn mit den Ladungen keine materielle Masse ver-

bunden ist, den Feldkräften das Gleichgewicht halten müssen, legt den Versuch der Konstruktion mechanischer Modelle der elektromagnetischen Vorgänge sehr nahe. Man denke sich etwa den Äther als unbewegliches Gerüst und darin die (positive) Elektrizität als ein Fluidum, das aus zwei Teilen besteht. Der eine Teil ist an feste Gleichgewichtslagen durch „quasi-elastische“ Kräfte gefesselt; die Verschiebungen aus den Gleichgewichtslagen werden durch den Vektor  $\delta$  beschrieben und die elektrische Energie ist  $\frac{1}{2} \delta^2$  pro Volumeinheit. Den zweiten Teil bilden die eigentlichen elektrischen Ladungen. Beide Teile zusammen konstituieren eine inkompressible Flüssigkeit; danach ist der durch die Bewegung des Fluidums gebildete elektrische Strom solenoidal verteilt. Um auch das magnetische Feld in dieses Bild einzubeziehen, kann man mit MAXWELL die Drehungen um die magnetischen Kraftlinien durch kleine Räder (und Zwischenräder) realisiert denken; der kinetischen Energie der Räder entspricht dann die magnetische Energie  $\frac{1}{2} \mathfrak{h}^2$ , und die Rolle der Zwischenräder hat das genannte, aus diskreten Teilchen bestehende Fluidum zu übernehmen. Ein solches Modell genügt in der Tat jenen Grundgleichungen der Elektronentheorie, aber es bietet einem vollständigeren Verständnis der elektrischen Erscheinungen ausserordentliche Schwierigkeiten. Schon die Deutung der negativen Ladungen, noch viel mehr aber die Berücksichtigung der ponderablen Materie macht notwendigerweise das mechanische Modell äusserst verwickelt.

Diesem Tatbestande gegenüber sind zweierlei Standpunkte möglich. Entweder begnügt man sich mit dem Bewusstsein der prinzipiellen Möglichkeit der mechanischen Erklärbarkeit aller elektromagnetischen Vorgänge, ohne eine ins einzelne gehende Untersuchung anzustreben. Oder aber man verzichtet überhaupt auf jede mechanische Erklärung — eine Auffassung, zu der sich LORENTZ selbst bekennt. Dabei wird man wohl noch manche Ausdrucksweise der Mechanik beibehalten müssen, man redet ja von den auf die Elektronen wirkenden Kräften, aber der Äther hat Eigenschaften wie Dichte oder Elastizität völlig verloren. Wenn LODGE aus der Formel für die elektromagnetische Masse eines Elektrons (vom Radius  $R$  und der Ladung  $e$ )

$$m = \frac{c^2}{6\pi c^2 R}$$

durch Division mit seinem Volumen, oder auf anderem ähnlichen Wege, die Dichte des Äthers berechnet (das Resultat ist ungefähr  $5 \cdot 10^{10}$ ), so hat das von diesem Standpunkt aus ebensowenig Sinn wie die Kraftlinien J. J. THOMSONS, die den Äther gleichsam greifen und mitführen. Dennoch behalten solche Veranschaulichungen und auch mechanische Analogien und Bilder, wie die von BJERKNES und KORN ersonnenen, in den Händen der Forscher den grössten heuristischen Wert.

Hat es danach überhaupt noch einen Sinn vom Äther zu reden? Schliesslich ist ihm nur noch soviel Substantialität geblieben, dass man durch ihn ein Koordinatensystem festlegen kann.

Selbst dieser letzte Rest der Substantialität wird durch das *Relativitätsprinzip* angegriffen, von dem der nächste Vortrag handeln soll.

## ZWEITER VORTRAG

*Das Einsteinsche Relativitätsprinzip* hier in Göttingen zu besprechen, wo MINKOWSKI gewirkt hat, erscheint mir eine besonders willkommene Aufgabe.

Man kann die Bedeutung dieses Prinzips von verschiedenen Gesichtspunkten beleuchten. Von der mathematischen Seite der Frage, die durch MINKOWSKI eine so glänzende Darstellung gefunden hat und von ABRAHAM, SOMMERFELD u. a. weiter ausgebaut worden ist, soll hier nicht die Rede sein. Vielmehr sollen nach einigen erkenntnistheoretischen Betrachtungen über die Begriffe von Raum und Zeit diejenigen physikalischen Erscheinungen erörtert werden, die zu einer experimentellen Prüfung des Prinzips beitragen könnten.

Das Relativitätsprinzip behauptet folgendes: Wenn eine physikalische Erscheinung im Bezugssystem  $x, y, z, t$  durch gewisse Gleichungen beschrieben wird, so wird es auch eine Erscheinung geben, die sich in einem andern Bezugssystem  $x', y', z', t'$  durch dieselben Gleichungen beschreiben lässt. Dabei hängen beide Bezugssysteme durch Beziehungen zusammen, in denen die Lichtgeschwindigkeit  $c$  vorkommt und die ausdrücken, dass das eine System sich relativ zum andern mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt.

Befindet sich der Beobachter  $A$  in dem ersten,  $B$  in dem zwei-

ten Bezugssystem, und verfügt jeder über Maszstäbe und Uhren, die in *seinem* System ruhen, so wird *A* die Werte von  $x, y, z, t$ , *B* aber die Werte von  $x', y', z', t'$  messen, wobei zu bemerken ist, dass *A* und *B* sich auch ein und desselben Maszstabs und ein und derselben Uhr bedienen können. Wir müssen annehmen, dass, wenn Maszstab und Uhr von dem ersten Beobachter irgendwie dem zweiten in die Hände gespielt werden, sie dabei von selbst die richtige Länge bzw. den richtigen Gang annehmen, derart, dass *B* aus seinen Messungen die Werte von  $x', y', z', t'$  herausbekommt. Beide werden nun für die Lichtgeschwindigkeit den gleichen Wert finden und überhaupt die gleichen Beobachtungen machen können.

Gesetzt, es gäbe einen Äther; dann wäre unter allen Systemen  $x, y, z, t$  eines dadurch ausgezeichnet, dass die Koordinatenachsen, sowie die Uhr im Äther ruhen. Verbindet man hiermit die Vorstellung (die auch LORENTZ nur ungern aufgeben würde), dass Raum und Zeit etwas völlig Verschiedenes seien und dass es eine „wahre Zeit“ gebe (die Gleichzeitigkeit würde dann unabhängig vom Orte bestehen, entsprechend dem Umstande, dass uns die Vorstellung unendlich grosser Geschwindigkeiten möglich ist), so sieht man leicht, dass diese wahre Zeit eben von Uhren, die im Äther ruhen, angezeigt werden müsste. Wenn nun das Relativitätsprinzip in der Natur allgemeine Gültigkeit hätte, so würde man allerdings nicht in der Lage sein, festzustellen, ob das grade benützte Bezugssystem jenes ausgezeichnete ist. Man kommt also dann zu denselben Resultaten, wie wenn man im Anschluss an EINSTEIN und MINKOWSKI die Existenz des Äthers und der wahren Zeit leugnet und alle Bezugssysteme als gleichwertig ansieht. Welcher der beiden Denkweisen man sich anschliessen mag, bleibt wohl dem einzelnen überlassen.

Um die physikalische Seite der Frage zu diskutieren, müssen wir zunächst die Transformationsformeln aufstellen, wobei wir uns auf eine spezielle Form beschränken, in der sie schon im Jahre 1887 von W. VOIGT bei Erörterungen über das DOPPLERsche Prinzip benutzt worden sind, nämlich

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = az - bct, \quad t' = at - \frac{b}{c}z;$$

dabei erfüllen die Konstanten  $a > 0$ ,  $b$  die Relation

$$a^2 - b^2 = 1,$$

welche die Identität

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

zur Folge hat. Der Ursprung des Systems  $x', y', z'$  bewegt sich gegen das System  $x, y, z$  in der  $z$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $bc/a$ , die immer kleiner als  $c$  ist. Überhaupt muss jede Geschwindigkeit kleiner als  $c$  angenommen werden.

Sämtliche Zustandsgrößen irgendeiner Erscheinung, in dem einen bzw. dem andern System gemessen, hängen durch gewisse Transformationsformeln zusammen. Diese lauten z.B. für die Geschwindigkeit eines Punktes

$$v'_x = \frac{v_x}{\omega}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\omega}, \quad v'_z = \frac{av_z - bc}{\omega},$$

wobei

$$\omega = a - \frac{bv_x}{c}$$

ist.

Wir betrachten weiter ein System von Punkten, deren Geschwindigkeit eine stetige Funktion der Koordinaten ist. Es sei  $dS$  ein den Punkt  $P(x, y, z)$  umgebendes Raumelement zur Zeit  $t$ ; diesem Werte  $t$  und den Koordinaten von  $P$  entspricht nach den Transformationsgleichungen ein Zeitpunkt  $t'$  in dem andern Bezugssystem, und jeder Punkt, der zur Zeit  $t$  in  $dS$  liegt, hat für diesen festgesetzten Wert von  $t'$  bestimmte  $x', y', z'$ . Die Punkte  $x', y', z'$  erfüllen ein Raumelement  $dS'$ , welches mit  $dS$  so zusammenhängt:

$$dS' = \frac{dS}{\omega}.$$

Denken wir uns mit den Punkten ein Agens (Materie, Elektrizität, etc.) verbunden, und nehmen wir an, dass der Beobachter  $B$  Anlass habe, mit jedem Punkte dieselbe Menge des Agens zu verbinden wie der Beobachter  $A$ , so müssen sich offenbar die Raumdichten umgekehrt verhalten wie die Volumelemente, d.h.

$$\rho' = \omega \rho.$$

Alle diese Beziehungen sind reziprok, d.h. man kann die gestrichenen und ungestrichenen Buchstaben vertauschen, wenn man gleichzeitig  $b$  durch  $-b$  ersetzt.



Die Grundgleichungen des electromagnetischen Feldes behalten bei der Transformation ihre Gestalt, wenn man folgende Grössen einführt:

$$\delta'_x = a\delta_x - b\delta_y, \quad \delta'_y = a\delta_y + b\delta_x, \quad \delta'_z = \delta_z,$$

$$\mathfrak{h}'_x = a\mathfrak{h}_x + b\delta_y, \quad \mathfrak{h}'_y = a\mathfrak{h}_y - b\delta_x, \quad \mathfrak{h}'_z = \mathfrak{h}_z;$$

zwischen diesen, der transformierten Raumdichte  $\rho'$  und der transformierten Geschwindigkeit  $v'$  gelten also im System  $x', y', z', t'$  die Gleichungen:

$$\operatorname{div} \delta' = \rho',$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{h}' = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{h}' = \frac{1}{c} (\delta' + \rho' v'),$$

$$\operatorname{rot} \delta' = -\frac{1}{c} \mathfrak{h}'.$$

Insoweit genügen die Feldgleichungen der Elektronentheorie dem Relativitätsprinzip; es wird sich aber noch darum handeln, die Bewegungsgleichungen der Elektronen selbst mit dem Prinzip in Einklang zu bringen.

Wir werden, etwas allgemeiner, die Bewegung eines beliebigen materiellen Punktes betrachten. Hierbei ist die Einführung des Begriffs „Eigenzeit“, einer schönen Erfindung MINKOWSKIS, von Nutzen. Danach gehört jedem Punkte gewissermassen eine eigene Zeit zu, die vom gewählten Bezugssystem unabhängig ist; ihr Differential wird definiert durch die Gleichung:

$$d\tau = \sqrt{(1 - v^2/c^2)} dt.$$

Die mit Hilfe der Eigenzeit  $\tau$  gebildeten Ausdrücke

$$\frac{d}{d\tau} \frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d}{d\tau} \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{d}{d\tau} \frac{dz}{d\tau},$$

lineare homogene Funktionen der gewöhnlichen Beschleunigungskomponenten, bezeichnen wir als Komponenten der „MINKOWSKISCHEN Beschleunigung“. Wir beschreiben die Bewegung eines Punktes durch die Gleichungen:

$$m \frac{d}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} = \mathfrak{R}_x, \text{ usw.},$$

wo  $m$  eine Konstante ist, die wir die „MINKOWSKISCHE MASSE“ nennen. Den Vektor  $\mathfrak{K}$  bezeichnen wir als die „MINKOWSKISCHE KRAFT“.

Es lassen sich dann leicht die Transformationsformeln für diese Beschleunigung und Kraft ableiten;  $m$  lassen wir ungeändert. So hat man

$$\mathfrak{K}'_x = \mathfrak{K}_x, \quad \mathfrak{K}'_y = \mathfrak{K}_y, \quad \mathfrak{K}'_z = a \mathfrak{K}_z - \frac{b}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathfrak{K}).$$

Das Wesentliche ist nun folgendes. Das Relativitätsprinzip erfordert, dass, wenn bei einer wirklichen Erscheinung die MINKOWSKISCHEN KRÄFTE in bestimmter Weise von den Koordinaten, Geschwindigkeiten etc. im einen Bezugssystem abhängen, die transformierten MINKOWSKISCHEN KRÄFTE im andern Bezugssystem in derselben Weise von den transformierten Koordinaten, Geschwindigkeiten etc. abhängen. Das ist eine besondere Eigenschaft, die *alle* Kräfte der Natur haben müssen, wenn das Relativitätsprinzip gelten soll. Setzen wir das voraus, so kann man die auf bewegte Körper wirkenden Kräfte berechnen, wenn man sie für den Fall der Ruhe kennt. Bewegt sich z.B. ein Elektron von der Ladung  $e$ , so denken wir uns ein Bezugssystem, in dem es momentan ruht. Dann wirkt auf das Elektron in diesem System die MINKOWSKISCHE KRAFT

$$\mathfrak{K} = eb;$$

hieraus folgt durch Anwendung der Transformationsgleichungen für  $\mathfrak{K}$  und  $b$ , dass die in einem beliebigen Koordinatensystem auf das mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegte Elektron wirkende MINKOWSKISCHE KRAFT

$$\mathfrak{K} = e \frac{b + [\mathbf{v} \cdot \mathfrak{h}]/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

beträgt. Diese Formel stimmt mit dem gewöhnlichen Ansatz der Elektronentheorie nicht überein infolge des Auftretens des Nenners. Der Unterschied rührt daher, dass man gewöhnlich nicht mit unserer MINKOWSKISCHEN, sondern der „NEWTONSCHEN KRAFT“  $\mathfrak{F}$  operiert, und wir sehen, dass für ein Elektron diese beiden Kräfte folgendermassen zusammenhängen:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{K} \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Man wird annehmen, dass diese Beziehung für beliebige materielle Punkte gilt.

Somit kann man die Bewegungserscheinungen auf zwei verschiedene Weisen behandeln, entweder mit der MINKOWSKISCHEN oder mit der NEWTONSCHEN Kraft. Im letzteren Falle lauten die Bewegungsgleichungen

$$\mathfrak{F} = m_1 j_1 + m_2 j_2,$$

und hier bedeuten  $j_1$  die gewöhnliche Beschleunigung in der Richtung der Bewegung,  $j_2$  die gewöhnliche Normalbeschleunigung, und man nennt die Faktoren

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}},$$

$$m_2 = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

die „longitudinale“ und „transversale Masse“.

Genau so wie die MINKOWSKISCHEN Kräfte, müssen auch die in der Natur vorkommenden NEWTONSCHEN Kräfte bestimmten Bedingungen genügen, wenn das Relativitätsprinzip erfüllt sein soll. Das ist z.B. der Fall, wenn, unabhängig von der Bewegung, auf eine Fläche ein Normaldruck von der konstanten Grösse  $p$  pro Flächeneinheit wirkt; im transformierten System wirkt dann auf das entsprechende bewegte Flächenelement ein normaler Druck von der gleichen Grösse. Da wir die Invarianz der Feldgleichungen bereits erkannt haben, läuft die Frage, ob die Bewegungen in einem Elektronensystem dem Relativitätsprinzip entsprechen, lediglich auf eine experimentelle Prüfung der Formeln für die longitudinale und transversale Masse  $m_1$  und  $m_2$  heraus; obgleich die Versuche von BUCHERER und HUPKA diese Formeln zu bestätigen scheinen, ist man zu einer definitiven Entscheidung noch nicht gekommen.

Bezüglich der Masse des Elektrons ist noch zu bedenken, dass diese elektromagnetischer Natur ist; sie wird also von der Verteilung der Ladungen innerhalb des Elektrons abhängen. Die Formeln für die Masse können daher nur dann richtig sein, wenn die Ladungsverteilung und damit auch die Gestalt des Elektrons in bestimmter Weise mit der Geschwindigkeit veränderlich sind. Man muss annehmen, dass infolge einer Translation ein Elektron

das ruhend eine Kugel ist, ein in der Bewegungsrichtung abgeplattetes Ellipsoid wird; der Betrag der Abplattung ist

$$\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Nehmen wir an, dass die Gestalt und Grösse des Elektrons durch innere Kräfte reguliert werden, so müssen diese, um mit dem Relativitätsprinzip verträglich zu sein, derartige Eigenschaften haben, dass sich jene Abplattung bei der Bewegung von selbst einstellt. Hierzu hat POINCARÉ folgende Hypothese gemacht. Das Elektron ist eine geladene, ausdehnbare Haut, und den elektrischen Abstossungen der einzelnen Punkte des Elektrons widersetzt sich eine innere Normalspannung von unveränderlicher Grösse. In der Tat genügen nach obigem solche Normalspannungen dem Relativitätsprinzip.

In derselben Weise müssen alle innerhalb der ponderablen Materie wirksamen Molekularkräfte, ebenso die auf die Elektronen wirkenden quasielastischen und Widerstandskräfte, bestimmten Bedingungen genügen um mit dem Relativitätsprinzip in Einklang zu sein. Dann wird jeder bewegte Körper für einen mitbewegten Beobachter unverändert sein, für einen ruhenden aber eine Veränderung der Dimensionen erfahren, die eben eine Folge der durch jene Bedingungen geforderten Änderung der Molekularkräfte ist. Hieraus ergibt sich auch von selbst jene Verkürzung der Körper, welche schon früher erdacht wurde zur Erklärung des negativen Ausfalls des MICHELSONSchen Interferenzversuches und aller ähnlichen Versuche, die einen Einfluss der Erdbewegung auf optische Erscheinungen feststellen sollten.

Was den starren Körper anlangt, mit dem sich BORN, HERGLOTZ, NOETHER, LEVI-CIVITA beschäftigt haben, so werden die bei der Betrachtung der Rotationen auftretenden Schwierigkeiten wohl dadurch zu heben sein, dass man die Starrheit der Wirksamkeit besonders intensiver Molekularkräfte zuschreibt.

Schliesslich wollen wir uns der *Gravitation* zuwenden. Das Relativitätsprinzip erfordert eine Abänderung des NEWTONSchen Gesetzes, vor allem eine Fortpflanzung der Wirkung mit Lichtgeschwindigkeit. Die Möglichkeit einer endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraft ist schon von LAPLACE diskutiert worden, der sich als Ursache der Schwerkraft ein gegen die Sonne strömendes Fluidum dachte, das die Planeten gegen die Sonne

drückt. Er fand, dass die Geschwindigkeit  $c$  dieses Fluidums wenigstens 100 Millionen mal grösser als die des Lichtes angenommen werden müsse, damit die Rechnung mit den astronomischen Beobachtungen im Einklang bleibt. Die Notwendigkeit eines so grossen Wertes von  $c$  rührt daher, dass in seinen Endformeln die Grösse  $v/c$  in der ersten Potenz auftritt, wo  $v$  die Planetengeschwindigkeit ist. Soll nun aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  der Schwerkraft den Wert der Lichtgeschwindigkeit haben, wie es das Relativitätsprinzip fordert, so kann ein Widerspruch mit den Beobachtungen nur dann vermieden werden, wenn in dem Ausdruck für das modifizierte Gravitationsgesetz nur Grössen zweiter (und höherer) Ordnung in  $v/c$  auftreten.

Beschränkt man sich auf Grössen zweiter Ordnung, so lässt sich leicht auf Grund einer naheliegenden elektronentheoretischen Analogie eine Bedingung angeben, die das abgeänderte Gesetz in eindeutiger Weise festlegt. Betrachtet man nämlich die Kraft, die auf ein mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegtes Elektron wirkt,

$$e \left( b + \frac{1}{c} [v \cdot h] \right),$$

so hängen die Vektoren  $b$  und  $h$  noch von den Geschwindigkeiten  $v'$  der das Feld erzeugenden Elektronen ab; in dem Vektorprodukt  $[v \cdot h]$  kommen daher wohl die Produkte der Form  $vv'$  vor, nicht aber das Quadrat  $v^2$  der Geschwindigkeit des betrachteten Elektrons. Nehmen wir entsprechend an, dass im Ausdruck der auf den Punkt 1 wirkenden Anziehung, ausgeübt von Punkt 2, das Quadrat der Geschwindigkeit des Punktes 1,  $v_1^2$ , nicht auftritt, so muss in einem Bezugssystem, in dem der Punkt 2 ruht ( $v_2 = 0$ ), jede Geschwindigkeit überhaupt herausfallen; das Gesetz wird sich daher in diesem System auf das gewöhnliche NEWTONSche reduzieren. Geht man jetzt durch Transformation zu einem beliebigen Koordinatensystem über, so findet man, dass sich die auf den Punkt 1 wirkende Kraft aus zwei Teilen zusammensetzt, erstens einer Anziehung in Richtung der Verbindungslinie vom Betrage

$$R + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{2} v_2^2 R + \frac{1}{2} v_{2r}^2 \left( r \frac{dR}{dr} - R \right) - (v_1 v_2) R \right\},$$

zweitens einer Kraft in der Richtung  $v_2$  vom Betrage

$$\frac{1}{c^2} v_{1r} R v_2;$$

hier bedeutet  $r$  die Entfernung zwischen zwei gleichzeitigen Lagen beider Punkte,  $v$ , die Komponente von  $v$  nach der von 1 nach 2 gezogenen Verbindungslinie und  $R$  diejenige Funktion von  $r$ , welche im Falle der Ruhe das Anziehungsgesetz darstellt ( $R = k/r^2$  bei der NEWTONSchen Attraktion,  $R = k r$  bei quasielastischen Kräften). Zu beachten ist, dass hier unter „Kraft“ immer die „NEWTONSche Kraft“ zu verstehen ist, nicht die „MINKOWSKIsche“. Übrigens hat MINKOWSKI für das Gesetz der Schwerkraft einen etwas anderen Ausdruck angegeben. Bei POINCARÉ findet sich sowohl dieser, als auch der oben hingeschriebene.

### DRITTER VORTRAG.

Am Schluss des vorigen Vortrages wurde ein modifiziertes Gesetz der Gravitation angegeben, das mit dem Relativitätsprinzip in Übereinstimmung ist. Es ist zu beachten, dass dabei das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung nicht erfüllt ist.

Es sollen nun die Störungen erörtert werden, welche durch jene Zusatzglieder zweiter Ordnung entstehen können. Es gibt da neben vielen kurzperiodischen Störungen, die keine Bedeutung haben, eine säkulare Bewegung des Perihels der Planeten. DE SITTER berechnet diese für den *Merkur* zu  $6'',69$  pro Jahrhundert. Nun kennt man seit LAPLACE eine Perihelanomalie des Merkurs vom Betrage  $44''$  pro Jahrhundert; wenn diese auch das richtige Vorzeichen hat, ist sie doch viel zu gross, um durch jene Zusatzglieder erklärt werden zu können. Vielmehr wird sie von SEELIGER auf eine Störung durch den Träger des Zodiakallichtes zurückgeführt, dessen Masse man in plausibler Weise geeignet bestimmen kann. Hieraus kann also keine Entscheidung gewonnen werden, so lange nicht die Genauigkeit der astronomischen Messungen wesentlich gesteigert wird. Bei einer absoluten Genauigkeit wäre auch der Unterschied der „Eigenzeit“ der Erde von der Zeit des Sonnensystems zu berücksichtigen.

Eine andere Methode, die Gültigkeit des abgeänderten Gravitationsgesetzes zu prüfen, kann man auf ein Verfahren gründen, das MAXWELL zur Entscheidung darüber vorgeschlagen hat, ob das Sonnensystem sich durch den Äther hindurchbewegt. Ist dieses der Fall, so müssten die *Verfinsterungen der Trabanten des Jupiters*,

je nach der Stellung dieses Planeten zur Erde, Verfrühungen oder Verspätungen erleiden.

Denn beträgt die Entfernung Jupiter—Erde  $a$  und die Geschwindigkeitskomponente des Sonnensystems im Äther in Richtung der Verbindungslinie Jupiter—Erde  $v$ , so wird die Zeit  $a/c$ , die das Licht im Falle der Ruhe zum Durchlaufen der Strecke  $a$  brauchen würde, verwandelt in  $a/(c \pm v)$ ; es kommt also durch die Bewegung eine Verfrühung oder Verspätung zustande, die bis auf Glieder zweiter Ordnung  $av/c^2$  beträgt und die je nach dem Werte der Geschwindigkeitskomponente  $v$ , welche ja von der Stellung der beiden Planeten abhängt, verschiedene Werte annimmt. Nun ist klar, dass eine solche Abhängigkeit der Erscheinungen von der Bewegung durch den Äther dem Relativitätsprinzip widerspricht.

Um diesen Widerspruch aufzuklären, wollen wir uns die Sachlage schematisch vereinfachen. Wir denken uns, dass die Sonne  $S$  eine Masse habe, die im Verhältnis zu der des Planeten unendlich gross sei. Die Geschwindigkeit des Sonnensystems falle in die  $z$ -Achse, die wir durch die Sonne gehen lassen. Die Schnittpunkte der Bahn des Planeten mit der

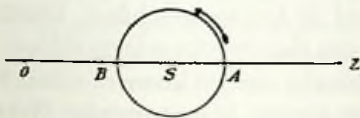


FIG. 1.

$z$ -Achse bezeichnen wir als oberen bzw. unteren Durchgang,  $A$  bzw.  $B$ . (Fig. 1).

Den Beobachter verlegen wir auf die Sonne. Bei jedem Durchgange des Planeten durch die  $z$ -Achse möge ein Lichtsignal zur Sonne hin eilen. Die Umlaufzeit sei  $T$ . Wenn die Sonne ruht, wird bei der als kreisförmig vorausgesetzten Bewegung die Zeit zwischen oberem und unterem Durchgange  $\frac{1}{2}T$  betragen; desgleichen auch die Zeit zwischen dem Eintreffen der beiden Lichtsignale. Bewegt sich dagegen die Sonne in der  $z$ -Richtung, so muss das Lichtsignal vom oberen Durchgange eine Verfrühung um  $av/c^2$ , das vom unteren Durchgange eine Verspätung vom selben Betrage erleiden; falls die gleichförmige Umlaufbewegung (wie MAXWELL als selbstverständlich voraussetzt) ungestört erhalten bleibt, würde das Zeitintervall zwischen dem Eintreffen der Lichtsignale zweier aufeinanderfolgender Durchgänge abwechselnd um  $2av/c^2$  vergrößert und verkleinert erscheinen. Die hierbei vorausgesetzte Erhaltung der gleichförmigen Kreisbewegung bei einer Translation im Äther ist aber nach dem Relativitätsprinzip un-

möglich. Beschreiben wir nämlich den Vorgang in einem Koordinatensystem, das an der Bewegung nicht teilnimmt, so wird das modifizierte Gravitationsgesetz anzuwenden sein, und dieses ergibt eine Ungleichförmigkeit der Planetenbewegung, infolge deren die Verschiedenheit der Zeitintervalle zwischen dem Eintreffen der Lichtsignale gerade aufgehoben wird.

Es kann daher die Feststellung, ob eine Verfrühung oder Verspätung der Verfinsterungen wirklich eintritt, zur Entscheidung für oder gegen das Relativitätsprinzip benutzt werden. Allerdings sind die numerischen Verhältnisse wieder recht ungünstig. So schätzt Herr BURTON, dem 330 photometrische Beobachtungen zur Verfügung stehen, die an der HARVARD-Sternwarte über die Verfinsterungen des ersten Jupitersatelliten angestellt worden sind, den wahrscheinlichen Fehler des schliesslichen Resultats für  $v$  auf 50 km/sec; andererseits hat man Sternengeschwindigkeiten von 70 km/sec beobachtet und die Geschwindigkeit des Sonnensystems gegen den Fixsternhimmel wird auf 20 km/sec geschätzt. Durch BURTONS Berechnungen wird also das Relativitätsprinzip schwerlich gestützt, höchstens zu Fall gebracht werden können, nämlich wenn sich schliesslich z.B. ein 100 km/sec übersteigender Wert ergäbe.

Lassen wir es dahin gestellt, ob die neue Mechanik durch astronomische Beobachtungen eine Bestätigung erfahren wird oder nicht. Doch wollen wir es nicht unterlassen, noch einige ihrer Grundformeln kennen zu lernen.

Definiert man die Arbeit als das skalare Produkt aus „NEWTONscher Kraft“ und Verschiebung, so ergeben die Bewegungsgleichungen das *Energieprinzip* in der gewöhnlichen Form, dass die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit gleich der Zunahme der Energie  $\epsilon$  ist:

$$\mathfrak{F}_x \frac{dx}{dt} + \mathfrak{F}_y \frac{dy}{dt} + \mathfrak{F}_z \frac{dz}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}.$$

Dabei hat die *Energie* den Ausdruck:

$$\epsilon = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right);$$

das stimmt bis auf Glieder 2. Ordnung mit dem Wert der kinetischen Energie der gewöhnlichen Mechanik

$$\epsilon = \frac{1}{2} mv^2$$

überein.



Ferner kann man aus den Bewegungsgleichungen das HAMILTONSche Prinzip

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta A) dt = 0$$

ableiten; hier ist  $\delta A$  die Arbeit der „NEWTONSchen Kraft“ bei einer virtuellen Verrückung und  $L$  die LAGRANGESche Funktion, die folgendermassen lautet:

$$L = - m c^2 (\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1).$$

Aus dem HAMILTONSchen Prinzip kann man umgekehrt wieder die Bewegungsgleichungen gewinnen. Die Grössen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$$

werden als *Komponenten der Bewegungsgrösse* zu bezeichnen sein.

Alle die Formeln kann man an den elektromagnetischen Bewegungsgesetzten eines Elektrons verifizieren; man hat dann für die „MINKOWSKISCHE Masse“  $m$  den Wert

$$m = \frac{e^2}{6\pi R c^2}$$

zu setzen und zu der elektrischen und der magnetischen Energie die Energie jener inneren Spannungen hinzuzufügen, welche, wie wir sahen, die Form des Elektrons bestimmen. So kann man aus dem allgemeinen Prinzip der kleinsten Wirkung für beliebige elektromagnetische Systeme, welches in dem ersten Vortrage besprochen wurde, durch Spezialisierung auf ein Elektron das eben angegebene HAMILTONSche Prinzip für einen materiellen Punkt gewinnen, doch muss wieder die Arbeit jener inneren Spannungen berücksichtigt werden.

Wir gehen jetzt dazu über, die *Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für ponderable Körper* zu betrachten. Diese sind rein phänomenologisch von MINKOWSKI aufgestellt worden, dann ist von M. BORN und PH. FRANK gezeigt worden, dass sie sich auch aus den Vorstellungen der Elektronentheorie herleiten lassen; auch LORENTZ selbst hat auf letzterem Wege die Gleichungen in einer formal etwas abweichenden Gestalt erhalten.

Um Beziehungen zwischen beobachtbaren Grössen zu bekommen, muss man durch Bildung von Mittelwerten über grosse Men-

gen von Elektronen die Einzelheiten der von ihnen herrührenden Erscheinungen verwischen. Man wird so auf folgende Gleichungen geführt (die mit denen der gewöhnlichen MAXWELLSchen Theorie gleichlauten):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathfrak{D} &= \rho_i, \\ \operatorname{div} \mathfrak{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{1}{c} (\mathfrak{C} + \dot{\mathfrak{D}}), \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}}.\end{aligned}$$

Hierin ist  $\mathfrak{D}$  die dielektrische Verschiebung,  $\mathfrak{B}$  die magnetische Induktion,  $\mathfrak{H}$  die magnetische Kraft,  $\mathfrak{E}$  die elektrische Kraft,  $\mathfrak{C}$  der elektrische Strom,  $\rho_i$  die Dichte der beobachtbaren elektrischen Ladungen. Deutet man die Mittelwertbildung durch Überstreichen an, so ist z. B.

$$\mathfrak{E} = \bar{\mathfrak{d}}, \quad \mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{h}},$$

wo  $\mathfrak{d}$ ,  $\mathfrak{h}$  die frühere Bedeutung haben; ferner ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= \mathfrak{E} + \mathfrak{P}, \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{B} - \mathfrak{M} - \frac{1}{c} [\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{v}],\end{aligned}$$

wo  $\mathfrak{P}$  das elektrische Moment,  $\mathfrak{M}$  die Magnetisierung pro Volumeneinheit und  $\mathfrak{v}$  die Geschwindigkeit der Materie bedeuten. Bei der Ableitung dieser Formeln sondert man die Elektronen in drei Arten. Die erste Art, die Polarisationselektronen, erzeugen durch ihre Verschiebung das elektrische Moment  $\mathfrak{P}$ ; die zweite Art, die Magnetisierungselektronen, erzeugen durch ihre Umläufe den magnetischen Zustand  $\mathfrak{M}$ ; die dritte Art, die Leitungselektronen, bewegen sich frei in der Materie und erzeugen die beobachtbare Ladungsdichte  $\rho_i$  und den Strom  $\mathfrak{C}$ . Letzterer ist noch in zwei Teile zu trennen; denn ist  $u$  die Relativgeschwindigkeit der Elektronen gegen die Materie, so ist die gesamte Geschwindigkeit der Elektronen  $v = v + u$ , also der von ihnen transportierte Strom

$$\mathfrak{C} = \bar{\rho} v = \bar{\rho} v + \bar{\rho} u;$$

$\bar{\rho}$  ist die beobachtbare Ladung  $\rho_i$ ,  $\bar{\rho} v$  der Konvektionsstrom,  $\bar{\rho} u$  der eigentliche Leitungsstrom.

Für alle diese Grössen existieren Transformationsformeln, von denen einige angegeben werden mögen:

$$\mathcal{E}'_x = \mathcal{E}_x, \quad \mathcal{E}'_y = \mathcal{E}_y, \quad \mathcal{E}'_z = a\mathcal{E}_z - bc\rho_z, \quad \rho'_z = a\rho_z - \frac{b}{c}\mathcal{E}_z,$$

$$\mathcal{P}'_x = a\mathcal{P}_x - \frac{b}{c}(\nu_x\mathcal{P}_x - \nu_x\mathcal{P}_z) + b\mathcal{M}_y,$$

$$\mathcal{P}'_y = a\mathcal{P}_y - \frac{b}{c}(\nu_y\mathcal{P}_y - \nu_y\mathcal{P}_z) - b\mathcal{M}_x,$$

$$\mathcal{P}'_z = \mathcal{P}_z.$$

Ferner sind folgende Hilfsvektoren von Nutzen:

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} - \frac{1}{c}[\nu \cdot \mathcal{D}], \quad \mathcal{B}_1 = \mathcal{B} - \frac{1}{c}[\nu \cdot \mathcal{E}],$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} + \frac{1}{c}[\nu \cdot \mathcal{B}], \quad \mathcal{D}_1 = \mathcal{D} + \frac{1}{c}[\nu \cdot \mathcal{H}].$$

Die angegebenen Feldgleichungen müssen jetzt noch ergänzt werden durch Aufstellung der Beziehungen, die zwischen den Vektoren  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{B}$  bestehen. Man kann diese Relationen auf zwei Weisen gewinnen.

Die erste phänomenologische Methode verfährt so: Man betrachtet einen beliebig bewegten Punkt der Materie und führt ein Bezugssystem ein, in dem dieser ruht; dann wird, falls das den Punkt umgebende Volumelement in dem Ruhesystem isotrop ist, z.B. zwischen  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{D}$  die für ruhende Körper zutreffende Gleichung gelten

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E},$$

oder auch

$$\mathcal{D}_1 = \varepsilon \mathcal{E}_1,$$

weil die Hilfsvektoren  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{E}_1$  für  $\nu = 0$  mit  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$  identisch sind. Nun transformieren sich aber  $\mathcal{D}_1$  und  $\mathcal{E}_1$  in gleicher Weise, und daraus folgt, dass auch im ursprünglichen Bezugssystem die Gleichung

$$\mathcal{D}_1 = \varepsilon \mathcal{E}_1$$

und entsprechend

$$\mathcal{B}_1 = \mu \mathcal{H}_1,$$

gültig bleibt. Was den Leitungsstrom betrifft, so bemerken wir nur, dass er von  $\mathcal{E}_1$  abhängt.

Die zweite Methode geht auf die Mechanik der Elektronen zurück. Ebenso wie sich für ruhende Körper die Gleichung  $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$  als Folge der Annahme quasielastischer Kräfte erweist, die die Elektronen in ihre Ruhelagen zurückziehen, wird man bei bewegten Körpern die Gleichung  $\mathfrak{D}_1 = \varepsilon \mathfrak{E}_1$  erhalten, wenn man den quasielastischen Kräften diejenigen Eigenschaften zuschreibt, die das Relativitätsprinzip verlangt. Letzteres wird erfüllt sein, wenn man für diese Kräfte den Ausdruck des verallgemeinerten Attraktionsgesetzes ansetzt, wobei  $R$  proportional  $r$  genommen werden muss.

Ähnliches gilt von der Erklärung des Leitungswiderstandes. Eine befriedigende elektronentheoretische Erklärung der magnetischen Eigenschaften der Körper ist zurzeit nicht vorhanden.

Zum Abschluss soll die Bedeutung der vorstehenden Gleichungen an drei bemerkenswerten Fällen erläutert werden.

Die *erste Bemerkung* knüpft an die Gleichung

$$\rho'_i = a \rho_i - \frac{b}{c} \mathfrak{E}_z$$

an. Zuzufolge dieser kann  $\rho'_i$  verschwinden, ohne dass  $\rho_i = 0$  zu sein braucht, wenn nur ein Strom  $\mathfrak{E}$  vorhanden ist; d. h. ein Beobachter  $A$  wird den Körper für geladen erklären, den ein relativ zu ihm bewegter  $B$  für ungeladen halten muss. Man kann das verstehen, wenn man beachtet, dass in jedem Körper gleich viele positive und negative Elektronen vorhanden sind, die sich bei ungeladenen Körpern kompensieren. Bewegt sich der Körper mit der Geschwindigkeit  $w$ , so werden, wenn ein Leitungsstrom vorhanden ist, beide Elektronenarten verschiedene Gesamtgeschwindigkeiten erhalten, also wird für beide Arten auch die Grösse  $\omega = a - b v_z/c$  verschiedene Werte haben. Berechnet nun ein mit dem Körper bewegter Beobachter  $B$  den Mittelwert der Ladungsdichte  $\bar{\rho}' = \bar{\omega} \bar{\rho}$  für beide Arten von Elektronen, so kann er die Summe Null erhalten, auch wenn sich für einen Beobachter  $A$ , in dessen Bezugssystem der Körper sich bewegt, die Mittelwerte  $\bar{\rho}$  der positiven und negativen Elektronen nicht kompensieren.

Dieser Umstand ruft eine Reminiszenz an eine alte Frage hervor. Um das Jahr 1880 gab es unter den Physikern eine grosse Diskussion über das CLAUSIUSSCHE Grundgesetz der Elektrodynamik. Man wollte damals einen Widerspruch dieses Gesetzes mit

den Beobachtungen herleiten, indem man schloss, dass nach dem Gesetze ein auf der Erde befindlicher stromdurchflossener Leiter auf eine mitbewegte Ladung  $e$  infolge der Erdbewegung eine Wirkung ausüben müsste, die man hätte auffinden können. Dass das Gesetz tatsächlich diese Wirkung nicht fordert, hat *BUDDE* bemerkt; es rührt das daher, dass der Strom durch die Erdbewegung auch auf sich selbst wirkt und eine „Kompensationsladung“ auf dem durchflossenen Leiter hervorruft, die jene erste Wirkung genau aufhebt. Zu ähnlichen Schlüssen führt die Elektronentheorie und man findet für die Dichte der Kompensationsladung, wenn die Geschwindigkeit die Richtung der  $z$ -Achse hat,

$$\frac{1}{c^2} w_z \mathfrak{C}_z;$$

diese muss ein an der Bewegung der Erde nicht teilnehmender Beobachter  $A$  annehmen, während sie für einen mitbewegten Beobachter  $B$  nicht besteht. Der angegebene Wert stimmt genau mit der aus dem Relativitätsprinzip abgeleiteten Formel überein; denn ist  $\rho'_l = 0$ , so findet man aus dieser Formel

$$\rho_l = \frac{b}{ac} \mathfrak{C}_z,$$

und da  $w_z = bc/a$  nach dem im zweiten Vortrage (S. 212) Gesagten die Geschwindigkeit der beiden Bezugssysteme gegeneinander ist, so findet man in der Tat

$$\rho_l = \frac{1}{c^2} w_z \mathfrak{C}_z.$$

Die *zweite Bemerkung* geht von den Transformationsgleichungen für das elektrische Moment  $\mathfrak{P}$  (S. 223) aus, welche dadurch, dass in ihnen die Magnetisierung  $\mathfrak{M}$  vorkommt, die Unmöglichkeit erkennen lassen, scharf zwischen Polarisations- und Magnetisierungselektronen zu unterscheiden. Vielmehr kann in einem magnetisierten Körper ( $\mathfrak{M} \neq 0$ ) von einem Bezugssystem aus beurteilt  $\mathfrak{P} = 0$  sein, während von einem andern  $\mathfrak{P}'$  von Null verschieden ist. Es soll das nun auf einen speziellen Fall angewendet werden, wobei wir uns auf Grössen 1. Ordnung beschränken. Der betrachtete Körper (etwa ein Stahlmagnet) enthalte nur Leitungselektronen und solche, die, wenn der Körper ruht, ein  $\mathfrak{M}$ , aber

kein  $\mathfrak{B}$  hervorbringen; er habe die Gestalt einer unendlich ausgedehnten ebenen Platte, begrenzt von zwei Ebenen  $a, b$ ; die Mittelebene machen wir zur  $yz$ -Ebene (Fig. 2). Wenn er ruht, möge in der  $y$ -Richtung eine konstante Magnetisierung  $\mathfrak{M}_y$  bestehen, während  $\mathfrak{B} = 0$  ist. Bekommt der Körper in der  $z$ -Richtung die Geschwindigkeit  $v$ , so wird ein an der Bewegung nicht teilnehmender Beobachter die elektrische Polarisation

$$\mathfrak{B}_x = -\frac{v}{c} \mathfrak{M}_y$$

wahrnehmen. Jetzt denken wir uns zu beiden Seiten des Körpers zwei Kondensatoren,  $c, d$ , welche mit ihm zusammen zwei gleiche Kondensatoren bilden, und diese mögen durch einen Draht (von  $c$  nach  $d$ ) kurzgeschlossen sein. Bei der Bewegung werden auf  $c$  und  $d$  Ladungen entstehen, die sich so berechnen lassen. Da offenbar ein Strom in der  $x$ -Richtung unmöglich ist, ist  $\mathfrak{E}_{1x} = 0$  oder  $\mathfrak{E}_x = v\mathfrak{B}_y/c$ . Da der Vorgang stationär ist, wird  $\mathfrak{B} = 0$ ; dann folgt aus rot  $\mathfrak{E} = 0$  die Existenz eines Potentials  $\varphi$ . Ist  $\Delta$  die Dicke der Platte, so hat man

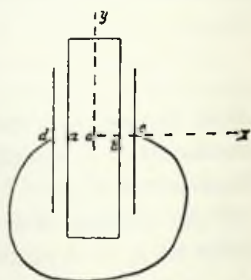


FIG. 2.

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{v}{c} \Delta \mathfrak{B}_y.$$

Aus der Symmetrie der Anordnung folgt offenbar

$$\varphi_d - \varphi_a = \varphi_b - \varphi_c,$$

und weil die Platten  $c, d$  kurzgeschlossen sind, muss

$$\varphi_d = \varphi_c$$

sein; daraus ergibt sich

$$\varphi_d - \varphi_a = -\frac{v}{2c} \Delta \mathfrak{B}_y.$$

Ist  $\gamma$  die Kapazität eines der beiden Kondensatoren, so wird die Ladung der Platte  $d$  gleich

$$-\frac{v}{2c} \gamma \Delta \mathfrak{B}_y,$$

und  $c$  bekommt den entgegengesetzt gleichen Betrag.

Jetzt vergleichen wir diesen Vorgang mit dem umgekehrten Fall, dass der Magnet  $a, b$  ruht und die Platten  $c, d$  sich mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit bewegen. Dann müsste nach dem Relativitätsprinzip alles ganz ebenso sein, wie im ersten Falle. In der Tat findet man sofort aus dem gewöhnlichen Induktionsgesetz genau den oben angegebenen Betrag der Ladung auf der Platte  $d$ . Aber es muss jetzt diese Ladung auf  $d$  eine entgegengesetzt gleiche auf der Ebene  $a$  des ruhenden Magneten influenzieren, und Entsprechendes muss für  $b$  und  $c$  gelten. Da ein Strom nicht fließen kann ( $\mathcal{C} = 0$ ), müssen in beiden Fällen, ob der Magnet sich bewegt und die Platten ruhen, oder umgekehrt, dieselben Ladungen auf dem Magneten bestehen. Wir haben uns also zu überlegen, wie es kommt, dass in dem zuerst behandelten Falle auf der Ebene  $a$  des bewegten Magneten die entgegengesetzte Ladung wie auf der Platte  $d$  auftritt; es wird dies nur möglich durch jene bei der Bewegung entstehende Polarisation  $\mathfrak{P}_x = -v\mathfrak{M}_y/c$ . Denn man hat

$$\mathfrak{D}_x = \mathcal{C}_x + \mathfrak{P}_x = \frac{v}{c} \mathfrak{B}_y - \frac{v}{c} \mathfrak{M}_y;$$

da hier  $\mathfrak{P}$  in der Geschwindigkeit von der ersten Ordnung, also das Glied  $[\mathfrak{P} \cdot v]$  zu vernachlässigen ist, wird

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{M} = \mathfrak{S},$$

$\mathfrak{S}$  aber ist Null, weil die Platte unendlich ausgedehnt angenommen wird. Daraus folgt

$$\mathfrak{D}_x = 0,$$

in der bewegten Platte findet keine dielektrische Verschiebung statt, also entspricht die Ladung auf  $a$  der auf  $d$ , wie es das Relativitätsprinzip verlangt.

Die *letzte Bemerkung* betrifft wiederum den Umstand, dass nach dem Relativitätsprinzip die Bewegung der Erde einen Einfluss auf die elektromagnetischen Vorgänge nicht haben kann. Es ist aber von LIÉNARD auf eine Erscheinung aufmerksam gemacht worden, wo ein solcher Einfluss, und zwar zu einem Betrage 1. Ordnung, zu erwarten sein soll; auch POINCARÉ hat diesen Fall in seinem Buche „Electricité et Optique“ diskutiert. Es handelt sich um die ponderomotorische Kraft auf einen Leiter. Um diese zu bestimmen, wird man für die auf die Leitungselektronen wirkende

Kraft pro Einheit der Ladung den naheliegenden Ansatz machen:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{B}];$$

dann ergibt sich die durch die Erdbewegung hervorgerufene Kraft auf den Leiter in Richtung der Bewegung vom Betrage

$$\frac{1}{c^2} (\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}) w_z;$$

da  $(\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E})$  die vom Leitungsstrom  $\mathfrak{E}$  entwickelte Wärme ist, ist dieser Ausdruck leicht numerisch zu berechnen (wobei sich freilich ein der Beobachtung unzugänglicher Wert ergibt).

Fragt man sich nun, wie dieses dem Relativitätsprinzip widersprechende Resultat zustande kommen kann, so sieht man, dass man in der Tat nicht die Kraft berechnet hat, welche auf die Materie des Leiters, sondern auf die im Innern des Leiters beweglichen Elektronen wirkt. Letztere Kraft muss erst durch Kräfte, die uns im einzelnen unbekannt sind, auf die Materie übertragen werden, und das geschieht nur dann ohne Änderung der Grösse, wenn für die Kräfte zwischen Materie und Elektronen Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung besteht. Für bewegte Körper ist aber in diesem Fall nach dem Relativitätsprinzip die Wirkung nicht gleich der Gegenwirkung, und dieser Umstand kompensiert gerade genau jene LIÉNARDSche Kraft.

Zusammenfassend kann man sagen, dass wenig Aussicht besteht, das Relativitätsprinzip experimentell zu bestätigen; es kommen ausser einigen astronomischen Beobachtungen nur die Messungen der Masse der Elektronen in Betracht. Doch darf man nicht vergessen, dass der Ausfall der negativen Versuche, wie der MICHELSONSche Interferenzversuch und die Experimente zur Feststellung einer durch die Erdbewegung hervorgerufenen Doppelbrechung, nur durch das Relativitätsprinzip erklärt werden konnten.

#### VIERTER VORTRAG.

*Die Erscheinungen der strahlenden Wärme*, die den Inhalt der letzten drei Vorlesungen bilden sollen, haben einen besonderen Reiz sowohl wegen der Schönheit der Gesetze, denen sie gehor-



chen, als auch wegen der Schwierigkeiten, die ihrem Verständnis entgegenstehen. Es soll nur daran erinnert werden, wie schwer es ist, zu erklären, warum allmählich erhitzte Körper zuerst nur dunkle Wärmestrahlen entsenden und erst bei steigender Temperatur zu leuchten beginnen.

Zunächst werde eine einfachere Frage behandelt, die der *schwarzen Strahlung*. Diese wird sich innerhalb einer allseitig geschlossenen, innen geschwärzten Hülle ausbilden, die nichts enthält als Äther (um bei dieser alten Ausdrucksweise zu bleiben); ihre Eigenschaften hängen von der Temperatur der Hülle ab. Wir operieren im folgenden mit geradlinigen Strahlen, sehen also von der Diffraktion ab; dazu brauchen nur die Körperdimensionen gross zu sein gegen die Wellenlänge; ferner sehen wir zwei sich in derselben Richtung fortpflanzende Strahlen verschiedenen Ursprungs als inkohärent an.

Um die schwarze Strahlung zu analysieren, betrachten wir die durch ein Flächenelement  $d\sigma$  innerhalb eines Kegels von der Öffnung  $d\omega$  mit einer auf  $d\sigma$  senkrechten Achse hindurchtretende Strahlung, deren Frequenz (Zahl der Schwingungen in der Zeit  $2\pi$ ) zwischen  $n$  und  $n + dn$  liegt; dabei zerlegen wir die Schwingungen nach zwei auf der Achse von  $d\sigma$  und aufeinander senkrechten Richtungen  $h$  und  $k$  und betrachten nur die  $h$ -Komponenten; wir nennen diesen Anteil die  $d\sigma d\omega dn h$ -Strahlung. Ihre Intensität, d. h. die in der Zeiteinheit durch  $d\sigma$  hindurchtretende Energiemenge, möge

$$q d\sigma d\omega dn$$

betragen; dabei ist  $q$  nur von  $n$  und der Temperatur  $T$ , nicht von der Richtung des Elements  $d\sigma$  abhängig.

Das Problem der schwarzen Strahlung ist, diese Funktion  $q$  zu bestimmen.

Durch sie ist nämlich der ganze Strahlungszustand charakterisiert. So ist z.B. die Dichte der Energie der  $d\omega dn h$ -Strahlung

$$\frac{q}{c} d\omega dn.$$

Da die  $d\omega dn k$ -Strahlung denselben Wert liefert und bei der Integration über alle Richtungen  $d\omega$  durch  $4\pi$  zu ersetzen ist, so ist die gesamte Energie pro Volumeneinheit der  $dn$ -Strahlung

$$8\pi \frac{q}{c} dn.$$

Durch Integration nach  $n$  findet man daraus die Energiedichte der Gesamtstrahlung, die nur noch von der Temperatur  $T$  abhängt.

Die schwarze Strahlung kann auch in einem nicht von schwarzen, sondern von vollkommen spiegelnden Wänden gebildeten Hohlraum bestehen, wenn sie einmal darin zustande gekommen ist. Das beruht auf folgendem Satze (Fig. 3):

Es möge ein Strahlenkegel von der Öffnung  $d\omega_1$  vom Punkte  $A$  ausgehen, an einem beliebig gekrümmten Spiegel reflektiert werden und im Punkte  $B$  das auf der Achse des Kegels senkrechte Flächenelement  $d\sigma_2$  beleuchten; umgekehrt gehe von  $B$  ein Strahlenkegel von der Öffnung  $d\omega_2$  aus und beleuchte das in  $A$  senkrecht auf ihm stehende Element  $d\sigma_1$ ; dann ist immer

$$d\omega_1 d\sigma_1 = d\omega_2 d\sigma_2.$$

Dieser Satz, der aus dem HUYGENSSchen Prinzip folgt, zeigt, dass an einer bestehenden schwarzen Strahlung durch spiegelnde Wände nichts geändert werden kann. Übrigens behält der Satz auch in der Emissionstheorie des Lichtes Gültigkeit, wo er aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgt; er ist dann das genaue Analogon zu dem Satze der kinetischen Gastheorie, dass das kinetische Gleichgewicht der Moleküle durch glatte Wände nicht gestört wird.

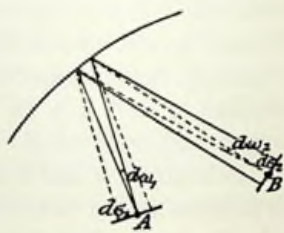


FIG. 3.

Ferner kann die schwarze Strahlung bestehen, wenn sich ein vollkommen durchsichtiger und also nicht emittierender Körper (von beliebigem Brechungsvermögen) in dem Hohlraume befindet; nur ist der Strahlungszustand, wie schon CLAUSIUS und KIRCHHOFF fanden, innerhalb des Körpers anders als im Äther. Das allgemeinste Resultat für einen beliebigen anisotropen Körper (Kristall) lautet folgendermassen.

Wir betrachten wieder einen Strahlenkegel  $d\omega$  und verstehen unter  $h$  und  $k$  die beiden durch die Struktur des Kristalles vorgeschriebenen Schwingungsrichtungen. Wir fassen die erste derselben ins Auge und bemerken, dass zu jeder Strahlrichtung eine bestimmte Richtung der Wellennormale gehört, sodass dem Strahlenkegel  $d\omega$  ein bestimmter Kegel  $d\omega'$  der Wellennormalen ent-

spricht. Die Energiedichte der  $d\omega dn h$ -Strahlung hat den Wert

$$q \frac{c^2}{v^3} d\omega' dn,$$

wo  $v$  die Wellengeschwindigkeit ist.

Dass der hierdurch bestimmte Strahlungszustand des Kristalls mit dem oben charakterisierten des umgebenden Äthers im Gleichgewicht ist, kann man zeigen, indem man den Übergang der Strahlen aus dem einen Medium in das andere näher verfolgt. Dabei hat man einen Satz der Optik anzuwenden, der dem oben für den Fall der Reflexion besprochenen sehr verwandt ist und in einer Verallgemeinerung eines bekannten, von LAGRANGE herrührenden Theorems besteht. Zwischen zwei Punkten  $A, B$  in einem beliebigen homogenen oder inhomogenen anisotropen Körper mögen sich Strahlen mit in jedem Punkte bestimmter Schwingungsrichtung auf dem Wege  $L$  fortpflanzen, und es mögen die beiden

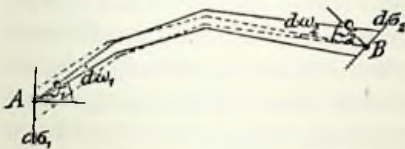


FIG. 4.

von  $A$  und  $B$  ausgehenden Strahlenkegel mit der Achse  $L$  und von den Öffnungen in  $B$  bzw.  $A$  die Flächenelemente  $d\sigma_2$  bzw.  $d\sigma_1$  (Fig. 4) erfüllen, deren Normalen,

mit der Linie  $L$  die spitzen Winkel  $\vartheta_2$  bzw.  $\vartheta_1$  bilden. Dann ist

$$\frac{u_1}{v_1^3} \cos \vartheta_1 d\omega'_1 d\sigma_1 = \frac{u_2}{v_2^3} \cos \vartheta_2 d\omega'_2 d\sigma_2,$$

wo  $u$  die Geschwindigkeit der Strahlen,  $v$  die der Wellen bedeuten, während  $d\omega'_1, d\omega'_2$  die den Strahlenkegeln  $d\omega_1, d\omega_2$  entsprechenden Kegel der Wellennormalen sind.

Wir fassen endlich den Fall ins Auge, dass ein beliebiger absorbierender und emittierender Körper  $M$  sich in dem Hohlraum befindet. Dann gilt der mit dem KIRCHHOFFSchen Gesetz zusammenhängende Satz, dass Gleichgewicht besteht, wenn in dem umgebenden Äther die oben betrachtete schwarze Strahlung existiert. Den Beweis, bei dem man sich um die Natur der Vorgänge im Innern des Körpers nicht zu kümmern braucht, kann man z.B. in folgender Weise führen.

Wir verbinden einen Punkt  $A$  der Hülle mit einem Punkt  $B$

des Körpers  $M$  durch eine Gerade; in irgendeinem Punkte  $P$  dieser Linie konstruieren wir ein zu ihr senkrechtes Flächenelement  $d\sigma$ , das  $P$  zum Mittelpunkt hat. Wir betrachten ferner einen Kegel  $d\omega$  mit dem Scheitel  $P$  und der Achse  $PB$ , der von  $P$  aus auf den Körper  $M$  gerichtet ist. Die Verlängerung dieses Kegels, mit der Achse  $PA$ , bezeichnen wir mit  $d\omega'$ ;  $h$  habe dieselbe Bedeutung wie oben. Die  $d\sigma d\omega dn h$ -Strahlung ist schwarz, weil sie von der Hülle herrührt, und ihre Intensität ist also  $q d\sigma d\omega dn$ . Es ist zu beweisen, dass auch die  $d\sigma d\omega' dn h$ -Strahlung schwarz ist, gleichgültig, welches ihr eigentlicher Ursprung ist; setzen wir letztere gleich  $q' d\sigma d\omega' dn$ , so ist also zu zeigen, dass

$$q = q'$$

ist.

Dieser Beweis möge nur angedeutet werden. Man betrachte zunächst nicht die  $dn h$ -Strahlung, sondern die gesamte Strahlung  $d\sigma d\omega$ , bzw.  $d\sigma d\omega'$ . Ihre Intensität sei in dem einen Fall  $Q d\sigma d\omega$ , in dem anderen  $Q' d\sigma d\omega'$ . Dann muss  $Q = Q'$  sein, denn das Temperaturgleichgewicht darf nicht gestört werden, wenn das Element der Hülle, welches von  $d\omega'$  getroffen wird, durch einen sphärischen vollkommenen Spiegel ersetzt wird, dessen Krümmungsmittelpunkt in  $P$  liegt. Das Anbringen dieses Spiegels hat nämlich zur Folge, dass der Körper  $M$ , statt der Strahlung  $Q d\sigma d\omega$ , die Strahlung  $Q' d\sigma d\omega'$  erhält. Da nun an der Emission von  $M$  nichts geändert wird, so liegt es nahe, die Bedingung für die Erhaltung des Gleichgewichtes darin zu sehen, dass  $Q = Q'$  ist. Um diesen Beweis gegen jeden Einwand zu sichern, und auf die Intensität  $q$  der monochromatischen Strahlung von bestimmter Schwingungsrichtung auszudehnen, sind jetzt nur ähnliche Kunstgriffe nötig, wie sie KIRCHHOFF an der entsprechenden Stelle seines Beweises anwendet.

Von der schwarzen Strahlung kennt man noch zwei Eigenschaften, die sich ohne näheres Eingehen auf die Natur der emittierenden und absorbierenden Körper beweisen lassen und die durch das STEPHAN-BOLTZMANNsche Gesetz und das WIENSche Verschiebungsgesetz formuliert werden. Diese Gesetze, deren Ableitung bekannt genug ist, bestimmen die gesuchte Funktion  $q(n, T)$  bis zu einem gewissen Grade. Führt man zur Vereinfachung der Formeln die Grösse

$$\frac{q}{c} = \varepsilon$$

ein, so ergibt sich nämlich

$$\varepsilon = n^3 f\left(\frac{T}{n}\right),$$

und die Aufgabe läuft jetzt darauf hinaus, die Funktion *eines* Argumentes zu bestimmen.

$\varepsilon d\omega dn$  ist die Energie pro Volumeinheit der  $d\omega dn$  *h*-Strahlung. Mit dieser wäre auch die *Entropie* der Volumeinheit,  $\eta d\omega dn$ , bekannt, die mit ihr durch die thermodynamische Gleichung ( $\eta$  Funktion von  $\varepsilon$  und  $n$ )

$$\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{T}$$

zusammenhängt; daraus ergibt sich für  $\eta$  der Ausdruck

$$\eta = n^2 \psi\left(\frac{\varepsilon}{n^3}\right).$$

Man kann die Entropie eines Strahlenbüschels nicht nur im Äther, sondern auch im Innern durchsichtiger materieller (isotroper oder anisotroper) Körper angeben. Die betreffende Formel lässt sich dadurch ableiten, dass man eine kontinuierlich vom Äther in den Körper überführende Grenzschicht annimmt, deren Dicke gross ist gegen die Wellenlänge; denn dann ist das reflektierte Licht zu vernachlässigen, der Übergang der Strahlen ist umkehrbar, also bleibt dabei die Entropie ungeändert.

In emittierenden und absorbierenden Körpern wird es sich darum handeln, denjenigen Teil der Strahlung, der von aussen her durch ein Volumelement hindurchgeschickt wird, zu trennen von der in dem Element erzeugten Strahlung selbst. Da wir die wirkliche Ursache der Strahlung nicht kennen, so werden wir eine fiktive Ursache einführen können, derart, dass der von ihr herrührende Strahlungszustand mit dem wirklich vorhandenen übereinstimmt. Man kann diese fiktiven Strahlungserreger „elektromotorische Kräfte“ nennen in Anlehnung an die Bezeichnung derjenigen Ursachen, die das Entstehen eines elektrischen Stromes bewirken. Überhaupt soll jetzt die Strahlung vom Standpunkt der elektromagnetischen Lichttheorie aufgefasst werden, deren Grundgleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \mathfrak{C},$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \mathfrak{B}$$

lauten. In einem beliebigen (anisotropen) Medium sind die Komponenten von  $\mathfrak{B}$  lineare Funktionen der Komponenten von  $\mathfrak{S}$ . Drückt man die zeitliche Veränderlichkeit aller vorkommenden Grössen entsprechend einer monochromatischen Lichtwelle durch den Faktor  $e^{int}$  aus, so bestehen auch zwischen den Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{C}$  lineare Relationen, aber mit komplexen Koeffizienten, die noch von  $n$  abhängen; wir setzen

$$\begin{aligned} E_x + \mathfrak{E}_x &= \rho_{11} \mathfrak{C}_x + \rho_{12} \mathfrak{C}_y + \rho_{13} \mathfrak{C}_z, \\ E_y + \mathfrak{E}_y &= \rho_{21} \mathfrak{C}_x + \rho_{22} \mathfrak{C}_y + \rho_{23} \mathfrak{C}_z, \\ E_z + \mathfrak{E}_z &= \rho_{31} \mathfrak{C}_x + \rho_{32} \mathfrak{C}_y + \rho_{33} \mathfrak{C}_z; \end{aligned}$$

dabei sei

$$\rho_{23} = \rho_{32}, \rho_{31} = \rho_{13}, \rho_{12} = \rho_{21}.$$

Die Grössen  $E_x, E_y, E_z$  sind Null, wenn keine Emission vorhanden ist; strahlt der Körper aber selbst aus, so sind ihre reellen Teile die Komponenten jener „elektromotorischen Kraft“, die wir als fiktive Ursache der Strahlung annehmen.

Die reellen Teile der Koeffizienten  $\rho$  seien  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{33}$ ; zwischen diesen gelten die Gleichungen

$$\alpha_{23} = \alpha_{32}, \alpha_{31} = \alpha_{13}, \alpha_{12} = \alpha_{21}.$$

Die pro Volumeinheit entwickelte Wärme beträgt

$$\alpha_{11} \mathfrak{C}_x^2 + \dots + 2\alpha_{12} \mathfrak{C}_x \mathfrak{C}_y + \dots$$

Man kann nun immer neue Koordinatenachsen einführen derart, dass diese quadratische Form die einfache Gestalt

$$\alpha_1 \mathfrak{C}_x^2 + \alpha_2 \mathfrak{C}_y^2 + \alpha_3 \mathfrak{C}_z^2$$

annimmt; die Richtungen der drei neuen Koordinatenachsen nennen wir Hauptrichtungen, sie variieren im allgemeinen nicht nur von Punkt zu Punkt, sondern können in einem Volumelement noch von der Frequenz  $n$  abhängen.

Es lässt sich jetzt folgendes beweisen:

Um die wirklich vorhandene Strahlung hervorzubringen, muss man für ein Frequenzintervall  $n, n + dn$  in jedem (makroskopischen) Volumelement  $dS$  in den drei Hauptrichtungen elek-

tromotorische Kräfte wirken lassen, deren Amplituden durch

$$\frac{4\pi c}{n} \sqrt{\frac{2c\epsilon\alpha_1 dn}{dS}}, \text{ etc.}$$

gegeben sind und deren Phasen voneinander unabhängig sind; auch darf zwischen den elektromotorischen Kräften in den verschiedenen Volumelementen keine Kohärenz bestehen.

Damit ist die Eigenstrahlung von der fremden Strahlung getrennt, da bei der letzteren die elektromotorischen Kräfte nicht wirksam sind.

Der Beweis, dass, wenn die angegebenen elektromotorischen Kräfte in einem System bestehen, in diesem Temperaturgleichgewicht herrscht, beruht auf einem Reziprozitätssatze des Inhalts: Wirken in zwei Volumelementen  $dS, dS'$ , in den Hauptrichtungen  $h, h'$  elektromotorische Kräfte, deren Amplituden sich umgekehrt wie  $dS, dS'$  verhalten, so besteht Gleichheit zwischen den Amplituden der Ströme, welche die erste Kraft in  $P'$  in der Richtung  $h'$  und die zweite in  $P$  in der Richtung  $h$  hervorruft.

Durch diese Auffassung der Strahlung als elektromagnetische Wellen lassen sich die erwähnten Sätze der Wärmestrahlung auch ausdehnen auf die Fälle, wo die Diffraktion zu berücksichtigen ist.

Eine Bemerkung ist noch anzuknüpfen an den Umstand, dass in dem Ausdruck der elektromotorischen Kräfte die unendlich kleinen Grössen  $dn$  und  $dS$  unter dem Wurzelzeichen stehen. Hieran erkennt man den fiktiven Charakter dieser Kräfte, denn es hängt ihr Wert noch von der gewählten Grösse der Volumelemente  $dS$  ab. Er ist so gewählt, dass die ausgestrahlte Energie proportional mit  $dS$  wird. Dazu muss nämlich die Amplitude der erregten Schwingungen proportional  $\sqrt{dS}$  sein. Da sie nun einerseits dem Volumelement und andererseits der elektromotorischen Kraft proportional ist, so muss letztere umgekehrt wie  $\sqrt{dS}$  variieren. Man kann dies noch in folgender Weise erläutern. Würden die Bewegungsursachen in allen Punkten eines Volumelements  $dS$  kohärent sein, so müsste die durch die Schwingungsamplitude gemessene Wirkung des Volumelements proportional seiner Grösse  $dS$  sein. Nimmt man aber an, dass es schon in einem einzelnen Volumelement sehr viele inkohärente Bewegungsursachen gibt, so zeigt eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung, dass dann in der Tat jene Gesamtwirkung des Elements proportional

$\sqrt{dS}$  sein muss. Wirken nämlich  $N$  Ursachen von gleicher Wahrscheinlichkeit in verschiedener Richtung, so heben diese sich nicht genau auf, sondern es ist am wahrscheinlichsten, dass die eine oder die andere Richtung um  $\sqrt{N}$  überwiegen wird. Verteilen wir im Volumelement  $dS$  also eine seiner Grösse proportionale Anzahl von elektromotorischen Kräften in willkürlicher Phase, so wird die resultierende Amplitude proportional  $\sqrt{dS}$  sein. Tatsachen dieser Art sind es, die uns zur molekularen Auffassung der Materie geradezu zwingen.

Es werde noch kurz die Frage besprochen, was man über die schwarze Strahlung im Äther mit Hilfe des Relativitätsprinzip erfahren kann.

Wir denken uns die spiegelnde Hülle in Bewegung und führen ein mitbewegtes Bezugssystem  $x', y', z', t'$  ein; dann muss es einen Zustand der schwarzen Strahlung geben, wo die Feldstärken  $b', h'$  dieselben Funktionen von  $x', y', z', t'$  sind, wie in dem Falle, dass die Hülle ruht,  $b, h$  von  $x, y, z, t$  abhingen.

Wenn die Hülle ruht, ist die resultierende elektromagnetische Bewegungsgrösse der Strahlung natürlich Null. Wenn sie sich aber bewegt, bemerkt ein nicht mitbewegter Beobachter eine resultierende Bewegungsgrösse in der Richtung der Translation; wegen der Anwesenheit der schwarzen Strahlung muss er, um die Translation hervorzubringen, eine der Beschleunigung proportionale Kraft aufwenden, die schwarze Strahlung hat also *träge Masse*. Wie das zustande kommt, ist einfach zu verstehen, wenn man der Hülle die Form eines Parallelepipeds gibt und die Vorgänge während der Beschleunigung ins Auge fasst; dann zeigt sich, dass der Strahlungsdruck auf die vordere und die hintere Wand nicht gleich ist, weil während der Zeit, die ein Wellenzug zum Durchlaufen des Parallelepipeds in der Bewegungsrichtung braucht, sich die Geschwindigkeit der Wände geändert hat; auf diese Weise entsteht eine der Geschwindigkeitsänderung, d. h. der Beschleunigung proportionale Resultierende.

Zum Schluss soll ein mathematisches Problem Erwähnung finden, das vielleicht bei den anwesenden Mathematikern Interesse erwecken wird. Es stammt aus der Strahlungstheorie von JEANS. In einer vollkommen spiegelnden Hülle können sich stehende elektromagnetische Schwingungen ausbilden, ähnlich den Tönen



einer Orgelpfeife; wir wollen nur auf die sehr hohen Obertöne das Augenmerk richten. JEANS fragt nach der auf ein Frequenzintervall  $dn$  fallenden Energie. Dazu berechnet er zuerst die Anzahl der zwischen den Frequenzen  $n$  und  $n + dn$  liegenden Obertöne und multipliziert die Zahl dann mit der zu jeder Frequenz gehörigen Energie, die nach einem Satze der statistischen Mechanik für alle Frequenzen gleich ist. Auf diese Weise bekommt er in der Tat das richtige Gesetz der Strahlung für langwellige Wärmestrahlen.

Hierbei entsteht das mathematische Problem, zu beweisen, dass die Anzahl der genügend hohen Obertöne zwischen  $n$  und  $n + dn$  unabhängig von der Gestalt der Hülle und nur ihrem Volumen proportional ist. Für mehrere einfache Formen der Hülle, wo sich die Rechnung durchführen lässt, wird der Satz in einer Leidener Dissertation bestätigt werden. Es ist nicht zu zweifeln, dass er allgemein, auch für mehrfach zusammenhängende Räume, gültig ist. Analoge Sätze werden auch bei andern schwingenden Gebilden, wie elastischen Membranen und Luftmassen etc., bestehen.

#### FÜNFTER VORTRAG.

Wir können jetzt die Hauptschwierigkeit ins Auge fassen, auf die man bei der Aufstellung einer Strahlungsformel stösst. Sie besteht darin, dass nach den gewöhnlichen Vorstellungen der Äther ein Kontinuum ist und daher unendlich viele Freiheitsgrade besitzt. Nun gibt es einen (im vierten Vortrag schon erwähnten) Satz der statistischen Mechanik, der folgendes besagt: Wenn zwei Gebilde, denen die Anzahlen  $a$  und  $b$  der Freiheitsgrade zukommen, im Wärmegleichgewicht sind, so verteilt sich die kinetische Energie auf sie im Verhältnis  $a : b$ . Dieser Satz gilt für alle Systeme, die den Gleichungen der Mechanik, oder, was dasselbe ist, dem HAMILTONSchen Prinzip gehorchen. Da sich nun, wie in der ersten Vorlesung ausgeführt wurde, das HAMILTONSche Prinzip auch in der Elektronentheorie aufstellen lässt, wobei die elektrische Energie der potentiellen, die magnetische der kinetischen entspricht, so gehört der Äther zu den Systemen, wo jener Satz gilt; die Anzahl seiner Freiheitsgrade ist aber unendlich, so dass er, wenn er mit einem ponderablen Körper im Wärmegleichgewicht ist, alle Energie aufnehmen muss. Dann würde im Gleichgewicht die

Temperatur des ponderablen Körpers absolut Null sein, und das ist offenbar unmöglich. Es muss in Wirklichkeit ein endliches Verhältnis zwischen der Energie des Äthers und der Materie im Gleichgewicht bestehen, aber man kann das von den angenommenen Grundlagen aus nicht erklären.

Es muss also eine ganz neue Hypothese gemacht werden: das HAMILTONSche Prinzip darf auf die Strahlung nicht anwendbar sein. Die Hypothese soll nun in der Einführung des von PLANCK ersonnenen *Energieelementes* bestehen. In der PLANCKSchen Theorie wird angenommen, dass es in den ponderablen Körpern „Resonatoren“ gibt, die den Austausch der Energie zwischen den Molekülen und dem Äther vermitteln, und über diese Resonatoren wird die Annahme gemacht, dass sie die Energie nicht in unendlich kleinen Abstufungen, sondern nur in endlichen Mengen, den Energieelementen, aufnehmen können. Die Grösse dieser Elemente hängt nach PLANCK noch von der Schwingungszahl (pro Zeiteinheit)  $\nu$  ab und ist gleich  $h\nu$  zu setzen, wo  $h$  eine Konstante ist; danach zeigen Resonatoren von grosser Schwingungszahl eine besondere Habgier nach Energie (wobei es ihnen dann beim Austausch der Energieelemente geschehen kann, dass sie besonders wenige davon bekommen). Aus dieser Annahme ergibt sich nun in der PLANCKSchen Theorie die Energiedichte der schwarzen Strahlung zwischen den Frequenzen  $\nu$  und  $\nu + d\nu$  folgendermassen:

$$\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu;$$

die Konstante  $k$  hängt mit der mittleren kinetischen Energie eines Gasmoleküls zusammen.

Eine Ableitung dieser Formel soll im letzten Vortrage gegeben werden, während heute die mannigfachen Konsequenzen und Verallgemeinerungen der Hypothese der Energieelemente besprochen werden mögen.

Die Herren EINSTEIN und STARK sind nämlich über PLANCK hinausgegangen und nehmen die Energieelemente nicht nur bei der Aufnahme und Abgabe der Energie durch die Resonatoren an, sondern schreiben ihnen auch selbständige Existenz im Äther zu.

Von den Erscheinungen, die sich hierdurch erklären lassen, wollen wir auf den *lichtelektrischen Effekt* näher eingehen. Bekanntlich entweichen aus hochpolierten Metallplatten bei Bestrahlung

mit ultraviolettem Lichte Elektronen von ganz bestimmter Geschwindigkeit. Die nähere Untersuchung der Erscheinung durch LENARD und E. LADENBURG ergab, dass die Geschwindigkeit der Elektronen nur von der Frequenz, nicht von der Intensität des Lichtes abhängt, während die Anzahl der erzeugten Elektronen von der Lichtintensität beeinflusst wird. Woher rührt nun die Geschwindigkeit der Elektronen? Man wird zunächst an die Temperaturbewegung der Elektronen im Metall denken. In dieser Hinsicht ist bemerkenswert, dass nach den Untersuchungen von RICHARDSON die bei hohen Temperaturen ohne Bestrahlung aus dem Metall entweichenden Elektronen eine kinetische Energie von derselben Grössenordnung wie die der Moleküle haben; dies zeigt sich darin, dass RICHARDSON aus seinen Messungen den Wert der Gaskonstanten ableiten konnte. Was den lichtelektrischen Effekt betrifft, wäre es nun denkbar, dass das Licht nur auslösend wirkt und dass die in Freiheit gesetzten Elektronen, bevor sie das Metall verlassen, infolge der Wärmebewegung ihre Geschwindigkeit erhalten. Aber die beobachteten Zahlen sind dieser Auffassung ungünstig. Denn die kinetische Energie der lichtelektrischen Elektronen ist schon unter gewöhnlichen Umständen fünfmal so gross als der Wärmebewegung entspricht, ferner hat LADENBURG gezeigt, dass die Geschwindigkeit bis  $800^\circ$  unabhängig von der Temperatur ist.

Will man daran festhalten, dass dem Licht nur eine auslösende Wirkung zukommt, so muss man sich nach andern Ursachen für die Geschwindigkeit umsehen, indem man etwa die Aussendung der lichtelektrischen Elektronen mit der Ausstrahlung der  $\beta$ -Teilchen des Radiums in Parallele setzt.

Eine davon ganz verschiedene Auffassung ist die, dass die Energie der Elektronen direkt aus der des Lichtes stammt. EINSTEIN wendet auf diesen Vorgang seine Lichtquantenhypothese an. Ein einzelnes Lichtquantum hat genügende Energie, ein Elektron aus dem Metall zu befreien und ihm seine Geschwindigkeit zu verleihen. Daraus folgt, dass auch schwaches Licht den Elektronen dieselbe Geschwindigkeit verleihen kann wie starkes von derselben Frequenz, denn bei schwachem Licht wird nur die Anzahl der Quanten und somit die Anzahl der erzeugten Elektronen kleiner, während jedes Quantum seine Energie an ein einzelnes Elek-

tron abgibt. Auch die numerischen Werte sind mit dieser Hypothese vereinbar. Setzt man nämlich nach PLANCK

$$h = 6,5 \times 10^{-27}$$

und nimmt für ultraviolettes Licht

$$\nu = 1,03 \times 10^{15},$$

so erhält man

$$h\nu = 6,7 \times 10^{-12} \text{ Erg};$$

aus Geschwindigkeiten, wie sie bei den Messungen von LENARD häufig vorkamen, ergibt sich andererseits die Energie eines Elektrons zu

$$3 \times 10^{-13} \text{ Erg},$$

sie ist also erheblich kleiner als das Energieelement. Daher hat ein Quantum ausreichende Energie um nicht nur dem Elektron seine Geschwindigkeit zu geben, sondern auch, um bei seiner Loslösung Arbeit zu leisten. Bezeichnen wir diese Arbeit mit  $P$  und die der Austrittsgeschwindigkeit entsprechende Spannungsdifferenz mit  $\Phi$ , so muss

$$h\nu = e\Phi + P$$

sein, wo  $e$  die Elektronenladung ist. Hier wird  $P$  nicht von  $\nu$ , sondern nur von dem benutzten Körper abhängen. Es ergibt sich also eine lineare Gleichung zwischen  $\nu$  und  $\Phi$ , und auch diese hat das Experiment bestätigt.

Trotzdem hält der Redner die Lichtquantenhypothese für unmöglich, wenn die Quanten als völlig inkohärent angesehen werden, eine Annahme, die offenbar die natürlichste ist und die auch PLANCK macht.

Die Unmöglichkeit der inkohärenten Quanten folgt aus der Betrachtung der Interferenzerscheinungen. LUMMER und GEHRCKE haben nämlich noch Interferenzen bei 2 Millionen Wellenlängen Phasendifferenz beobachtet; das entspricht bei gelbem Licht einer Länge von einem Meter. Wenn jedes Quantum für sich deutliche Interferenzen geben soll, müsste es sich also in der Fortpflanzungsrichtung über eine solche Länge erstrecken. Aber auch die seitliche Ausdehnung der Quanten müsste beträchtlich sein; das ergibt sich aus der Beugungstheorie der optischen Instrumente. Würde ein Lichtquantum seitlich z.B. nur  $1 \text{ cm}^2$  bedecken, so hätte es offenbar keinen Sinn grosse Fernrohrobjektive herzustellen.

len, denn es würde für jedes Quantum nur ein Teil der Objektivöffnung bei der Bilderzeugung benützt werden; andererseits ist es wohl bekannt, dass man durch grosse Objektive die Deutlichkeit der Bilder steigern kann. Also müsste ein Lichtquantum mindestens so gross sein, wie die grössten Fernrohrobjektive, und da es unwahrscheinlich ist, dass sich das Volumen des Quantums nach unsern Instrumenten richtet, wird man es sich noch erheblich grösser vorzustellen haben. Dann könnten aber durch eine kleine Öffnung, etwa die Pupille des Auges, nur Teile von Quanten eindringen und da nach der Hypothese bei der Absorption auf der Netzhaut nur volle Quanten aufgenommen werden könnten, müssten die Teile sich dabei wieder zu ganzen Quanten zusammenfügen. Übrigens zeigt schon die Betrachtung der einfachsten Interferenzerscheinungen, wie die NEWTONSchen Ringe, dass die Quanten jedenfalls teilbar sein müssten, weil dabei der Strahl durch Reflexion in zwei Teile zerlegt wird, die verschiedene Wege gehen und schliesslich zur Interferenz gelangen.

Wegen dieser Schwierigkeiten hat STARK die Hypothese abgeändert: die Lichtquanten sollen *regelmässige Aggregate* bilden, in denen Kohärenz herrscht. In der Tat ist dieser Weg gangbar, doch müssten viele Resultate der alten Optik fallen gelassen werden, wenn man daran festhalten will, dass die einzelnen Quanten nur nebeneinander existieren können und unzerstörbar sind. Teilt sich, etwa bei der Reflexion an einer ebenen Fläche, ein Quantenbündel in Teile, deren jeder das Volumen des ursprünglichen Bündels hat, so müsste das Gefüge des Quantenaggregates im reflektierten und im gebrochenen Licht lockerer geworden sein, indem einige Quanten hindurchgehen, andre zurückgeworfen werden. Es entstehen dabei Fragen ähnlich wie bei der NEWTONSchen Emissionstheorie.

LORENTZ möchte den heuristischen Wert dieser Hypothese zwar nicht bestreiten, aber die alte Theorie so lange als möglich verteidigen.

STARK hat auch Versuche darüber angestellt, wie die Länge eines solchen Quantenaggregats von der Lichtquelle abhängt; dazu hat er Interferenzen bei hohen Gangunterschieden von Licht verschiedener Intensität beobachtet. Doch ist es nicht notwendig bei der Deutung dieser Versuche an Quanten zu denken; auch in der gewöhnlichen Lichttheorie werden Züge regelmässiger Wellen

nur eine gewisse, möglicherweise mit dem Ursprung des Lichtes veränderliche Länge haben.

Es ist noch zu erwähnen, dass J. J. THOMSON durch die Betrachtung der lichtelektrischen Effekte zu einer der Quantentheorie ähnlichen Hypothese geführt worden ist; da bei einer glatten Front der Lichtwelle die an eine Stelle gelangende Energie in schwachem Lichte nicht ausreichen würde um einem Elektron seine Geschwindigkeit zu geben, nimmt er die Wellenfront als ungleichmässig an, indem die Energie stellenweise angehäuft ist (*patches of light*).

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Quantenhypothese besonders durch die Erscheinungen gestützt wird, bei denen es den Anschein hat, dass zur Hervorbringung des Effekts in einen bestimmten Punkt eines Körpers eine endliche Energiemenge gebracht werden muss. So wird man auf die Frage geführt: Kann ein gewöhnliches, nicht aus Quanten bestehendes Lichtbündel eine endliche Menge Energie, von der Grösse eines Energieelementes an ein Elektron abgeben?

In dem Lichtbündel bestehe in der Richtung der  $x$ -Achse die elektrische Kraft  $a \cos nt$ . Diese wirke auf ein Elektron von der Masse  $m$  und der Ladung  $e$ , das durch eine quasielastische Kraft vom Betrage  $f x$  an seine Gleichgewichtslage gebunden sei. Dann lautet die Bewegungsgleichung des Elektrons (die übrigens den Mathematikern noch manche Frage darböte):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -f x + e a \cos nt + \frac{e^2}{6\pi c^3} \frac{d^3 x}{dt^3};$$

das letzte Glied rührt von der Strahlungsdämpfung her. Wir wollen es so einrichten, dass das Elektron möglichst viel Energie dem Lichtstrahl entnehmen kann; das wird natürlich der Fall sein, wenn Resonanz besteht, d.h. wenn

$$f = mn^2.$$

Dann erreicht das Elektron schliesslich eine Amplitude, die der des einfallenden Lichtes proportional ist; die Energie des Elektrons wird gleich der in einem gewissen Volumen befindlichen Energie des auffallenden Lichtbündels, und unter Benützung der Formel für die elektromagnetische Masse des Elektrons (vgl. 1. Vortrag S. 209) wird dieses Volumen gleich

$$\frac{3\lambda^4}{8\pi^3 R}.$$

Es fragt sich, ob diese Energie den Wert des PLANCKSchen Energieelements erreichen kann. Damit dies der Fall ist, muss die Intensität, wie man berechnen kann, für gelbes Licht in absolutem Masse

$$J = 93\ 000$$

pro sec und  $\text{cm}^2$  betragen. Nun ergibt sich aus der Solarkonstanten die Intensität in starkem Sonnenlichte zu

$$J = 2\ 000\ 000.$$

Wäre das Sonnenlicht monochromatisch, so ginge es also. Aber einmal ist es das nicht, sodann kann man die Beobachtungen mit ungeheuer viel schwächerem Lichte machen, etwa mit der Intensität  $J = 2$ . Von einem gewöhnlichen Lichtbündel wird das Elektron also nicht die erforderliche Lichtmenge erhalten, um daraus ein Energieelement zu absorbieren.

Es liegt das offenbar an dem Vorhandensein eines Widerstandes; ohne ihn könnte das Elektron natürlich beliebig viel Energie aufspeichern. Dieser Widerstand, der mit der Ausstrahlung zusammenhängt, braucht nun aber unter Umständen nicht mit seinem vollen Werte wirksam zu sein, kann sogar ganz fehlen. Um dies einzusehen, wollen wir eine ganz andere Frage ins Auge fassen.

Wenn Licht die Moleküle eines Körpers trifft, wird es dabei gerade so wie in einer Staubwolke zerstreut und dabei geschwächt (Extinktionskoeffizient); dies hängt mit dem oben eingeführten Widerstande gegen die Elektronenschwingungen eng zusammen. Für die Extinktion in der Luft hat RAYLEIGH eine Formel angegeben, und diese bekommt man gerade wenn man für jedes Molekül den oben angeschriebenen Widerstand annimmt. Indes muss man im allgemeinen bei der Berechnung der Zerstreung die Wechselwirkung der Moleküle beachten. Dies geht schon daraus hervor, dass, wenn in einer gegen die Wellenlänge kleinen Entfernung zwei Elektronen in parallelen Bahnen und mit gleicher Frequenz und Phase schwingen, die von beiden ausgestrahlte Energie nicht doppelt, sondern viermal so gross wird, als wenn beide ohne gegenseitige Beeinflussung, schwängen. Für jedes Elektron muss man also, um die Schwingungen in Gang zu halten, die doppelte Arbeit aufwenden, es erleidet den doppelten Widerstand. Sind umgekehrt die Phasen beider Elektronen entgegengesetzt, so fin-

det keine Ausstrahlung statt, also ist auch kein Widerstand vorhanden. Betrachtet man nun die Fortpflanzung des Lichtes in einem System von Molekülen, so findet man, dass bei regelmässiger Lagerung, wie in einem Kristall, kein Widerstand und keine Zerstreung vorhanden sein werden. Dass in der Luft das Licht zerstreut wird, liegt an der unregelmässigen Anordnung der Moleküle. Diese ergibt im Mittel für jedes Molekül denselben Widerstand, den ein vereinzelt Elektron erfahren würde. Es bestehen aber Abweichungen von diesem Mittelwert und es kann in einem bestimmten Augenblick Teilchen geben, für welche der Widerstand grösser oder kleiner als der genannte Wert ist. Für einzelne Moleküle kann er so gut wie Null, oder sogar negativ sein.

Würde der Widerstand ganz fehlen und würde volle Resonanz bestehen, so würde die Amplitude des Elektrons ins Unendliche wachsen proportional der Zeit  $t$ , die Intensität also proportional  $t^2$ . Nun folgen sich aber die Lichtwellen nicht unbegrenzt lange regelmässig aufeinander; beachtet man dies, so bleibt die unendliche Anhäufung der Energie doch bestehen, nur geht sie langsamer vor sich (proportional  $t$ ). Berechnet man nun die Zeiten, die nötig sind, um ein Lichtquantum im Elektron aufzuhäufen, so ist das Resultat keineswegs günstig für die alte Theorie. Denn wenn ein regelmässiger, monochromatischer Wellenzug von der Intensität  $J$  auffällt, dann ergibt sich für die Anzahl der Schwingungen, die nötig sind, damit die Energie des Elektrons den Wert des PLANCKSchen Energieelements erhält, der Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{2hc^2}{3\pi\lambda^3 R J}};$$

das ist bei starkem Sonnenlicht mehr als eine Million. Da sich nun höchstens einige Millionen regelmässiger Schwingungen folgen, so werden in Wirklichkeit, vor allem bei schwachem Licht, die Zeiten, die zur Aufnahme eines Quantums nötig sind, recht gross werden.

Allerdings könnte man berücksichtigen, dass auch ohne Annahme von Lichtquanten im Lichtbündel stellenweise Unregelmässigkeiten der Intensität, Anhäufungen der Energie bestehen werden. Dieser Punkt ist noch weiter zu untersuchen, aber vorläufig müssen wir anerkennen, dass die betrachteten Erscheinungen ohne Annahme von Lichtquanten der Erklärung grosse Schwierigkeiten bieten.



Zum Schlusse möge eine etwas gewagte Hypothese über die PLANCKSchen Energieelemente besprochen werden, die Herr ERICH HAAS aufgestellt hat. Es kommt dabei nur die Grössenordnung in Betracht. Man kann, allerdings etwas nachträglich, einen Gedankengang konstruieren, durch den man einigermaßen natürlich auf diese Hypothese geführt wird. Im Jahre 1885 stellte EXNER fest, dass der Brechungsexponent eines Gases mit der Raumerfüllung desselben zusammenhängt. Diese Tatsache würde sich theoretisch ergeben, wenn man die Moleküle als leitende Kugeln betrachten dürfte. Es möge sich eine leitende Kugel vom Volumen  $v$  in einem homogenen elektrischen Felde  $E$  befinden; dann nimmt sie das elektrische Moment

$$3 Ev$$

an. Sind in einem Raume  $N$  Kugeln verteilt, so wird in dem Raume die Polarisation

$$3 EvN$$

bestehen (wenn man zur Vereinfachung von einer Wechselwirkung der Kugeln absieht). Daraus ergibt sich die Dielektrizitätskonstante zu

$$1 + 3vN;$$

der Brechungsexponent  $\mu$  ist die Quadratwurzel daraus, also angenähert

$$\mu = 1 + \frac{3}{2} vN.$$

Dieser Wert stimmt, wie EXNER bemerkt hat, der Grössenordnung nach mit den Messungen überein. So hat z. B. für Argon der Brechungsexponent bei  $0^\circ$  und 76 cm Hg den Wert 1,00028. Daraus würde mit Hilfe unserer Formel  $Nv = 0,00018$  folgen; nun ist  $Nv$  der Teil des Gasraumes, der von den Molekülen eingenommen wird, und für diesen findet man nach der VAN DER WAALSSchen Theorie aus den kritischen Daten 0,00036, was der Grössenordnung nach stimmt.

Nun sind die Gasmoleküle gewiss keine leitenden Kugeln und es erscheint als ein Rätsel, dass sie sich trotzdem so verhalten. Dieses Rätsel hat J. J. THOMSON gelöst durch seine kühne Hypothese über die Struktur des Atoms. Er nimmt an, das Atom bestehe aus einer positiv geladenen Kugel mit gleichförmig verteilter Ladung, in deren Innern die negativen Elektronen unter der Anziehung der

positiven Kugel und ihrer gegenseitigen Abstossung stabile Gleichgewichtslagen finden. Bringt man ein solches Atom in ein elektrisches Feld  $E$ , so bleibt die positive Ladung, die als unveränderlich betrachtet wird, überall gleich dicht, alle Elektronen aber werden in der Richtung der Kraft  $E$  um gleiche Strecken verschoben. Ist  $\rho$  die Dichte der positiven Ladung, so wird jedes Elektron um  $3E/\rho$  verschoben, bringt also das Moment  $3Ee/\rho$  hervor; sind  $\alpha$  Elektronen vorhanden, so erzeugen sie zusammen das Moment  $3\alpha Ee/\rho$ . Da nun bei einem neutralen Atom  $\alpha e$  gleich der Ladung  $\rho v$  der positiven Kugel ist, so ergibt sich die Polarisation jedes Atoms zu  $3Ev$ , wie bei einer leitenden Kugel.

Jetzt ziehen wir eine andere Vorstellung heran. LENARD hat sich bei seinen Untersuchungen über die Phosphoreszenz, die ja in einer Energieaufspeicherung besteht, folgende Anschauung gebildet. Es wird durch das Licht aus dem Molekül des Körpers ein Elektron entfernt (dass solches statthat, dafür sprechen auch die lichtelektrischen Erscheinungen). Dabei erhält das Elektron potentielle Energie gegen das Molekül, und das ist eben die aufgespeicherte Lichtenergie. Die spätere Ausstrahlung erfolgt bei der Rückkehr des Elektrons, die unter Schwingungen vor sich geht. Es ist dies der einzige Fall, wo man den sonst so „dunklen“ Prozess der Lichtausstrahlung einigermaßen versteht.

Diese Vorstellungen, die THOMSONSche Kugel und die LENARDSche Theorie der Phosphoreszenz verknüpfen wir nun und gelangen so zu der Hypothese von HAAS.

Wird ein THOMSONSches Atom von Lichtschwingungen getroffen, so werden die Elektronen in Schwingungen versetzt (Resonatoren). So lange ein Elektron aber in der positiven Kugel bleibt, findet keine wirkliche Absorption statt, während es wohl zur Dispersion und Zerstreuung beitragen kann. Schliesslich kann es vorkommen, dass das Elektron die Kugel ganz verlässt und der freien Wärmebewegung zum Opfer fällt; dann träte wirkliche Absorption ein. Damit haben wir ein Gebilde vor uns, das nur bestimmte, endliche Mengen von Energie, Energieelemente, aufnehmen kann. Man kann am Argon diese Energie der Grössenordnung nach berechnen, da man alle nötigen Daten, z.B. das Volumen eines Moleküls, die wirkliche Eigenschwingungszahl  $\nu$ , etc. kennt; man erhält:

$$h = 4,0 \times 10^{-27},$$

was mit dem Werte der PLANCKSchen Konstante der Grössenordnung nach übereinstimmt.

Doch stehen dieser Hypothese grosse Schwierigkeiten entgegen. So muss in der PLANCKSchen Strahlungstheorie ein Resonator auch mehrere Energieelemente aufnehmen können, d. h. es müssten mehrere Elektronen die positive Kugel verlassen können, dabei würden für jedes Elektron sich leicht etwas verschiedene Energiewerte ergeben und die PLANCKSche Konstante  $h$  könnte nur einen Mittelwert daraus darstellen. Ferner müsste  $h$  unabhängig von dem Körper sein. Dann ist noch folgendes zu bedenken: Bei der Emission von Licht müsste ein Elektron, nicht infolge einfallender Schwingungen, sondern wegen der Wärmebewegung, die Kugel verlassen und dann unter Schwingungen in sie zurückkehren. Bei der Absorption müssten umgekehrt, wie gesagt, vor dem Austritt des Elektrons Schwingungen stattfinden, bei der Rückkehr aber nicht. Man muss nämlich annehmen, dass die aus den Atomen herausgetretenen Elektronen wieder in dieselben zurückkehren; fände dies mit Schwingungen statt, so würde die dem Lichte entnommene Energie wieder als Licht ausgestrahlt werden. Dass man ohne solche ziemlich sonderbar klingende Annahmen die Aufnahme und Abgabe des Lichtes in vollen Quanten nicht erklären kann, kann uns übrigens nicht wundern; die Annahmen müssen eben die Ungültigkeit des HAMILTONSchen Prinzipes für diese Vorgänge einschliessen und sich also von den gewöhnlichen mechanischen Vorstellungen ziemlich weit entfernen.

Wie schwierig das Verständnis der Emission und Absorption des Lichtes ist, ersieht man auch daraus, dass man in der gewöhnlichen Absorptionstheorie einen Widerstand von anderer Art als die in den obigen Gleichungen vorkommende Strahlungsdämpfung annehmen muss, der von HELMHOLTZ proportional  $dx/dt$  angenommen wurde und der, wie z.B. auch VOIGT hervorhebt, erheblich grösser als die Strahlungsdämpfung sein muss. Auch in grossem Abstände von einer Absorptionslinie kämen dann beide Widerstände zur Geltung und es könnte somit die Schwächung des Sonnenlichtes in der Atmosphäre der RAYLEIGHSchen Formel nicht folgen, was sie doch, auch der absoluten Grösse nach, tut.

Durch die Hypothese von HAAS wird das Rätsel des Energieelements mit der Frage nach dem Wesen und der Wirkung der positiven Elektrizität verknüpft und es mag sein, dass diese ver-

schiedenen Fragen erst zugleich ihre vollständige Lösung finden können.

#### SECHSTER VORTRAG.

Den Inhalt des heutigen Vortrags wird die Ableitung einer Strahlungsformel bilden. Dieses Problem ist von mehreren Seiten, wie z.B. von Herrn REINGANUM, in Angriff genommen worden; hier soll aber nur von der PLANCKSchen Formel die Rede sein.

PLANCK nimmt als Vermittler des Energieaustausches zwischen Materie und Äther Resonatoren, etwa schwingende Elektronen, an. Es handelt sich dann um die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen einerseits zwischen dem Äther und den Resonatoren, andererseits zwischen den Resonatoren und den Molekülen. Auf den ersten Punkt, der keine Schwierigkeiten bietet, soll nicht näher eingegangen werden; es genügt, festzustellen, dass die dem Intervall  $\nu, \nu + d\nu$  entsprechende Energiedichte der schwarzen Strahlung aus der mittleren Energie eines Resonators der Frequenz  $\nu$  durch Multiplikation mit dem Faktor  $8\pi\nu^2 d\nu/c^3$  entsteht.

Es handelt sich also nur um die Frage: wie bestimmt man die mittlere Energie eines Resonators der Frequenz  $\nu$ ? Da man über den Mechanismus des Energieelementes, wie im vorigen Vortrage ausgeführt wurde, zu wenig weiss, so kann man diese Frage nicht direkt angreifen; es wurde ja festgestellt, dass sich die Emission und Absorption eines Energieelementes nicht nach den Gesetzen der Mechanik, dem HAMILTONSchen Prinzip, vollziehen kann. Daher bleibt nichts übrig; als zu den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu greifen; man wird sich damit begnügen müssen, die wahrscheinlichste Energieverteilung (die Verteilung grösster Entropie) zu berechnen, von der man annimmt, dass die wirkliche von ihr nicht in beobachtbarer Weise abweicht. Zur Darlegung der Methode möge eine Betrachtung aus dem ersten Bande von BOLTZMANN'S *Gasttheorie* eingeschaltet werden, die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung in einatomigen Gasen.

Hierzu entwirft man das folgende Diagramm. Vom Nullpunkte O aus werden so viele Vektoren gezogen, als Moleküle vorhanden sind, und jeder Vektor stellt nach Richtung und Länge die Geschwindigkeit eines Moleküls dar; die Endpunkte der Vektoren heissen „Geschwindigkeitspunkte“. Gesucht ist die Verteilung dieser Punkte über das Diagramm.

BOLTZMANN zerlegt nun das Diagramm in lauter gleich grosse Volumelemente. Ihre Anzahl sei  $k$ , und sie seien von 1 bis  $k$  nummeriert; die Anzahl der Moleküle sei  $n$ . Eigentlich ist  $k$  unendlich gross, vorläufig sei es aber als endlich angenommen und der Grenzübergang (gegen den die Mathematiker vielleicht Bedenken äussern könnten) werde bis zum Schlusse verschoben. Wie die Verteilung der Moleküle (wie wir kurz statt „Geschwindigkeitspunkte“ sagen wollen) über die Volumelemente geschieht, soll nun durch das Los entschieden werden nach folgender Regel. In einer Urne mögen sich  $k$  Arten von Kugeln befinden, die etwa durch die Ziffern von 1 bis  $k$  unterschieden sind, von jeder Art gleichviel (es genügte auch von jeder Art eine Kugel zu haben, dann müsste diese nach jedem Zuge in die Urne zurückgelegt werden). Für jedes Molekül wird eine Kugel gezogen; die Nummer der Kugel gibt dann an, in welches Volumelement des Diagrammes das betreffende Molekül kommen soll. Um alle Moleküle unterzubringen, hat man  $n$  Züge zu machen; ihre Gesamtheit soll ein „Versuch“ heissen. Derartige Versuche werden nun ausserordentlich oft,  $N$  mal, wiederholt; jeder Versuch liefert eine bestimmte Verteilung der Moleküle über das Diagramm, und es entsteht die Frage: welche unter den Verteilungen ist die wahrscheinlichste?

Zunächst ist die Wahrscheinlichkeit irgendeiner Verteilung zu berechnen. Es mögen bei dieser  $n_1$  Moleküle im ersten,  $n_2$  Moleküle im zweiten, usw.,  $n_k$  Moleküle im  $k$ -ten Element liegen; es ist also

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

Dann ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit dieser Verteilung der Wert

$$W = \frac{1}{k^n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Man kann leicht bestätigen, dass die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten über alle Verteilungen gleich 1 ist. Würde man nun ohne weiteres nach dem Maximum von  $W$  fragen, so würde man finden, dass es für  $n_1 = n_2 = \dots = n_k$  eintritt, d.h. für eine gleichförmige Verteilung der Moleküle über das Diagramm. In Wirklichkeit können aber nicht alle möglichen Verteilungen eintreten, denn die Gesamtenergie des Gases hat einen vorgeschrie-

benen Wert  $\epsilon$ . Bedeutet  $\epsilon_1$  die dem ersten,  $\epsilon_2$  die dem zweiten, usw.,  $\epsilon_k$  die dem  $k$ -ten Volumelement entsprechende Energie eines Moleküls, so besteht also die Bedingung

$$n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots + n_k\epsilon_k = \epsilon.$$

Auch wenn man diese berücksichtigt, kann man mit dem gleichen Lotteriespiel auskommen, allerdings würde die Ausführung grosse Geduld erfordern. Denn bei einer grossen Zahl von Versuchen wird sich ein falscher Wert der Energie herausstellen, und alle diese Versuche muss man verwerfen; die übrigen, bei denen der Energiewert zufällig stimmt, kann man „gelungene Versuche“ nennen. Auch deren Anzahl kann durch genügend häufige Versuche noch beliebig gross gemacht werden. Man kann ferner leicht einsehen, dass die Wahrscheinlichkeiten der gelungenen Versuche den vorhin berechneten Zahlen  $W$  zwar nicht gleich, aber proportional sind. Es kann nämlich offenbar die Summe der Zahlen  $W$ , erstreckt nur über die „gelungenen Versuche“, nicht mehr gleich 1 sein; hat sie den Wert  $A/k^n$ , so ergibt sich für den gelungenen Versuch die Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{1}{A} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Unter diesen Zahlen, wobei  $A$  und  $n$  konstant sind, hat man die grösste auszuzuchen; man hat also den Nenner, oder, was auf dasselbe herauskommt, den Logarithmus des Nenners zu einem Minimum zu machen.

Hier ist noch eine Bemerkung einzuschalten. Gesetzt, das Maximum der Wahrscheinlichkeit trete für die Verteilung  $n_{10}, n_{20}, \dots, n_{k0}$  ein, so darf man nicht behaupten, es sei sehr wahrscheinlich, dass sich bei dem Lotteriespiel gerade genau dieses Wertsystem ergibt, sondern nur, dass sich ein von diesem Wertsystem nur wenig verschiedenes ergibt; die Abweichungen werden in den Grenzen  $\sqrt{n_{10}}, \sqrt{n_{20}}, \dots, \sqrt{n_{k0}}$  eingeschlossen sein. Für grosse Werte der Zahlen  $n_{10}, n_{20}, \dots, n_{k0}$  werden die Abweichungen relativ geringfügig sein.

Ehe wir die Verteilung  $n_{10}, \dots, n_{k0}$  wirklich berechnen, wollen wir eine Verallgemeinerung vornehmen. Dabei ist es angebracht, die Benennungen der mehrdimensionalen Geometrie zu verwenden. Zu einem Gebrauch dieser Ausdrucksweise werden die Phy-

siker ja immer mehr und mehr geführt; es sei nur an die Mechanik von HERTZ erinnert, ferner an die in der physikalischen Chemie gebräuchlichen Methoden, bei denen das thermodynamische Potential durch eine Fläche nicht nur im Raume von drei, sondern neuerdings bei Betrachtungen über das Gleichgewicht in Systemen mit einer grösseren Zahl von Komponenten, auch von vier oder mehr Dimensionen dargestellt wird.

Das Gas möge aus beliebigen, mehratomigen Molekülen bestehen; jedes derselben sei ein System, das den Gesetzen der Mechanik genügt. Seien  $q_1, q_2, \dots, q_s$  die LAGRANGESchen Koordinaten eines Moleküls,  $p_1, p_2, \dots, p_s$  die entsprechenden Bewegungsmomente. Diese  $2s$  Grössen deuten wir als Koordinaten in einem  $2s$ -dimensionalen Raume; dann kann man in genau derselben Weise, wie vorher bei drei Dimensionen, das Verteilungsgesetz bestimmen, indem man den  $2s$ -dimensionalen Raum in  $k$  gleiche Volumelemente zerlegt und durch das Los entscheidet, wie viele Moleküle in jedem Elemente zu liegen kommen. Man erhält dieselbe Formel für die Wahrscheinlichkeit, und es ist wieder die gesamte, hier aus potentieller und kinetischer bestehende Energie  $\varepsilon$  als gegeben zu betrachten.

Für grosse Werte von  $n_1, n_2, \dots, n_k$  kann man, wenn man im Produkt konstante Faktoren fortlässt,  $n_1!$  usw. nach der STIRLINGSchen Formel ersetzen durch  $n_1^{n_1+1/2}$  usw., oder, da  $\frac{1}{2}$  klein ist gegen  $n_1$ , usw., auch durch  $n_1^{n_1}$ , usw.

Danach wird die Grösse, die man zu einem Minimum zu machen hat,

$$H = n_1 \log n_1 + \dots + n_k \log n_k.$$

Die Variation davon muss verschwinden:

$$\delta H = (1 + \log n_1) \delta n_1 + \dots + (1 + \log n_k) \delta n_k = 0.$$

Zwischen den Variationen  $\delta n_1, \dots, \delta n_k$  bestehen die Nebenbedingungen

$$\delta n_1 + \dots + \delta n_k = 0,$$

$$\varepsilon_1 \delta n_1 + \dots + \varepsilon_k \delta n_k = 0.$$

Daraus ergibt sich leicht

$$n_x = C e^{-\varepsilon_x}, \quad x = 1, \dots, k,$$

wobei  $C, l$  Konstanten sind.

In dieser Formel sind sowohl das MAXWELLSche Verteilungsgesetz, als auch die BOLTZMANNsche Verallgemeinerung desselben für mehratomige Gase, unter Berücksichtigung äusserer Kräfte, enthalten.

Man findet aus dieser Verteilungsformel leicht, dass bei einem einatomigen Gase die mittlere kinetische Energie eines Moleküls  $3/2l$  beträgt.

Wir fassen jetzt zwei Gase,  $a$  und  $b$ , ins Auge, die im Wärmeaustausch stehen; sie seien etwa durch eine Metallwand getrennt, die so dünn ist, dass man von der in ihr enthaltenen Energie absehen kann. Jedem der Gase kommt eine gewisse Energie  $\epsilon_a$  bzw.  $\epsilon_b$  zu, deren Summe  $\epsilon_a + \epsilon_b = \epsilon$  vorgeschrieben ist; es erhebt sich die Frage, wie sich die Energie auf beide Gase verteilt. Um sie zu beantworten, könnte man so vorgehen, dass man erst  $\epsilon_a$  und  $\epsilon_b$  willkürlich annimmt und die Wahrscheinlichkeit der Verteilungen in jedem Gase für sich berechnet; sind die Maximalwerte dieser Wahrscheinlichkeiten  $W_a$  and  $W_b$ , so wird die Wahrscheinlichkeit der vorausgesetzten Verteilung der Energie auf beide Gase  $W_a W_b$  sein, und man hätte das Maximum hiervon aufzusuchen. Doch würden sich auf diesem Wege Schwierigkeiten ergeben, weil man berücksichtigen muss, dass der oben eingeführte Faktor  $A$  noch von der Energie des betreffenden Gases abhängt.

Ein anderer Weg, der bequemer ist, ist der, dass man auf einmal durch das Los die Verteilung für beide Gase zugleich bestimmt. Das Gas  $a$  möge  $n_a$  Moleküle, das Gas  $b$  möge  $n_b$  Moleküle haben, so dass

$$n_a + n_b = n$$

ist. Jedem Gase kommt ein Geschwindigkeitsdiagramm zu, das wir in  $k$  bzw.  $k'$  gleiche Volumelemente zerlegen. Jedem Element entspreche eine Kugel; diese  $k + k'$  Kugeln legen wir in eine Urne. Für jedes Molekül wird ein Zug getan und nach dem Zuge die Kugel zurückgelegt. Eine grosse Anzahl Züge aber werden von vornherein als unbrauchbar verworfen, nämlich jedesmal, wenn bei einem Zuge für ein Molekül des ersten Gases eine Kugel herauskommt, die einem Molekül des zweiten Gases entspricht, und umgekehrt. Hat man für alle  $n$  Moleküle einen brauchbaren Zug getan, werden diese Kombinationen noch immer keinen „gelungenen Versuch“ darstellen, ausser wenn auch die Gesamtenergie gerade den richtigen Wert bekommt. Man sieht, dass nur ein lei-



denschaftlicher Spieler genügende Geduld aufbringen wird, um eine grosse Anzahl gelungener Versuche fertigzustellen.

Die Wahrscheinlichkeit eines gelungenen Versuches, bei welchem die Verteilung der beiden Gase über ihre Geschwindigkeitsdiagramme durch die Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_k$  bzw.  $n'_1, n'_2, \dots, n'_k$ , ausgedrückt wird, ergibt sich leicht proportional zu

$$\frac{n!}{n_1! \dots n_k! n'_1! \dots n'_k!}$$

Der Logarithmus des Nenners, oder, wie man auch sagen kann, die Grösse

$$H = n_1 \log n_1 + \dots + n_k \log n_k + n'_1 \log n'_1 + \dots + n'_k \log n'_k,$$

ist zum Minimum zu machen unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n_a,$$

$$n'_1 + n'_2 + \dots + n'_k = n_b,$$

$$n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots + n_k \varepsilon_k + n'_1 \varepsilon'_1 + n'_2 \varepsilon'_2 + \dots + n'_k \varepsilon'_k = \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich für jedes Gas dasselbe Verteilungsgesetz wie für ein einzelnes; die *Gleichgewichtsbedingung* aber besteht darin, dass die mittlere kinetische Energie  $3/2l$  für beide Gase den gleichen Wert hat.

Unsere Betrachtung hat uns zu gleicher Zeit das BOLTZMANNsche  $H$ -Theorem geliefert.

Diese Methode wenden wir dazu an, das Gleichgewicht zwischen den PLANCKSchen Resonatoren und den Molekülen zu finden. Die von PLANCK gegebene Ableitung seines Gesetzes ist von diesem Wege etwas verschieden.

Es mögen  $n'$  Gasmoleküle und  $n$  Resonatoren von einer bestimmten Frequenz  $\nu$  vorhanden sein, für welche das Energieelement  $q$  einen bestimmten Wert besitze.

Dem Gase können wir nun wieder ein Geschwindigkeitsdiagramm mit  $k'$  Volumelementen zuordnen.

Bei den Resonatoren unterscheiden wir  $k$  Fälle (übrigens wird die Zahl  $k$  ebenso wie  $k'$  schliesslich unendlich gross): Im 1. Falle soll der Resonator nichts erhalten, im 2. Falle soll er ein Energieelement erhalten, im 3. Falle zwei Energieelemente usf., im letzten,  $k$ -ten Falle  $k - 1$  Energieelemente.

Die Verteilung bestimmen wir wieder durch das Los. In der Urne befinden sich  $k' + k$  Kugeln; ein Zug für ein Gasmolekül hat nur Gültigkeit; wenn eine der ersten  $k'$  Kugeln herauskommt, ein Zug für einen Resonator nur, wenn eine der letzten  $k$  Kugeln herauskommt. Ausserdem werden noch alle Züge verworfen, bei denen die Gesamtenergie nicht stimmt. Daraus geht hervor, dass die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Resultates denselben Ausdruck haben muss, wie oben bei zwei Gasen. Sind also  $n'_1, n'_2, \dots, n'_{k'}$  die Anzahlen der Gasmoleküle, die bei einem Versuche den verschiedenen Elementen zukommen,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  die Anzahlen der Resonatoren, für welche sich die verschiedenen Fälle ergeben, so ist die Grösse, die ein Minimum werden soll:

$$H = n'_1 \log n'_1 + \dots + n'_{k'} \log n'_{k'} + n_1 \log n_1 + \dots + n_k \log n_k.$$

Die Nebenbedingungen lauten hier:

$$n'_1 + \dots + n'_{k'} = n',$$

$$n_1 + \dots + n_k = n,$$

$$n'_1 \varepsilon'_1 + \dots + n'_{k'} \varepsilon'_{k'} + \{n_2 + 2n_3 + \dots + (k-1)n_k\} q = \varepsilon.$$

$H$  wird zum Minimum für die Verteilung

$$n'_{x'} = C' e^{-l\varepsilon'_{x'}}, \quad x' = 1, \dots, k',$$

$$n_x = C e^{-l(x-1)q}, \quad x = 1, \dots, k,$$

wo  $C, C', l$  Konstanten sind.

Für diesen wahrscheinlichsten Zustand berechnen wir jetzt die mittlere Energie eines Gasmoleküls und die eines Resonators. Für erstere findet man leicht  $3/2l$ . Letztere ist offenbar gleich

$$\frac{n_2 + 2n_3 + \dots + (k-1)n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} q;$$

setzt man hier die für  $n_x$  gefundenen Werte ein, so erhält man in Zähler und Nenner einfache Reihen, die für  $k = \infty$  gehörig konvergieren, und der Ausdruck geht über in

$$\frac{q}{e^{lq} - 1}.$$

Nun ist die mittlere Energie eines Gasmoleküls der absoluten Temperatur proportional; PLANCK setzt

$$\frac{3}{2} kT = \frac{3}{2l},$$

also

$$l = \frac{1}{kT}.$$

Nimmt man ferner das Energieelement proportional der Schwingungszahl  $\nu$  an,  $q = h\nu$ , so findet man schliesslich für die mittlere Energie eines Resonators die PLANCKSche Formel

$$\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Es ist nicht zu leugnen, dass in dieser Ableitung eine gewisse Willkür steckt; denn man kann ein solches Lotteriespiel nach verschiedenen Grundsätzen einrichten. Man erkennt diese Willkür auch aus folgendem Umstande. Nach unseren Betrachtungen stellt

$$\frac{q}{e^{hq} - 1}$$

die mittlere Energie eines Gebildes vor, das Energie nur in vollen Portionen  $q$  aufnehmen kann; man könnte erwarten, dass man hieraus die mittlere Energie eines Gasmoleküls bekäme, wenn man  $q$  unendlich klein werden lässt, in der Tat erhält man aber dann in der Grenze  $1/l$  statt des richtigen Wertes  $3/2l$ . Die bestimmte Annahme, die wir über die Verlosung gemacht haben, ist also theoretisch nicht zu begründen; sie ist ein Notbehelf, der nicht zu umgehen ist, weil wir die wirklichen Vorgänge nicht kennen.

Eine andere Einkleidung dieser Theorie kann man mit der *statistischen Mechanik* von GIBBS gewinnen. Um zu bestimmen, wie sich bei einer gegebenen Temperatur ein Körper (etwa ein Gas) verhält, der auch unter der Wirkung äusserer Kräfte stehen kann, denkt sich GIBBS das System sehr viele Male wiederholt; so erhält er ein ganzes *Ensemble* von gleichbeschaffenen Systemen, wobei er aber alle möglichen Zustände zulässt. Das ganze System habe  $s$  Koordinaten  $q$  und  $s$  Bewegungsmomente  $p$ , wo die Zahl  $s$  ungeheuer gross ist; jedem Zustand entspricht dann ein Punkt im  $2s$ -dimensionalen Raume  $q_1, \dots, p_s$ .

GIBBS betrachtet nun eine ganz bestimmte Verteilung der Punkte in diesem Raume, die er ein „kanonisches Ensemble“ nennt; dasselbe wird so definiert, dass die Anzahl der Systeme, die in einem Element  $d\lambda$  des  $2s$ -dimensionalen Raumes liegen, gleich

$$\frac{\Psi - \epsilon}{N e^{\Theta}} d\lambda$$

ist, wo  $N$  die Anzahl aller Systeme und  $\epsilon$  die Energie eines Systems ist. Von den Konstanten  $\Psi$ ,  $\Theta$  spielt die letztere die Rolle der Temperatur. In diesem Verteilungsgesetz ist die Hypothese ausge-

drückt, dass Systeme von sehr grosser Energie wenig vorkommen.

Man kann nun die Annahme machen, dass irgendeine physikalische Grösse (z.B. die Anzahl der Moleküle in der unteren Hälfte des Gasraumes) durch den Mittelwert über alle Systeme des Ensembles gemessen wird. Auf diese Weise bekommt man in der Tat alle Sätze der kinetischen Gastheorie; zwar ist die Methode kühn — denn sie lässt sich höchstens plausibel machen, nicht beweisen —, aber sie hat den Vorteil, dass man prinzipiell jedes Problem des thermischen Gleichgewichts lösen kann. Man hat sie auf viele Erscheinungen, z.B. auf dissoziierte Gase, auf die Magnetisierung eines Körpers usw., angewandt, und man ist in allen untersuchten Fällen zu richtigen Resultaten gekommen.

Wendet man die GIBBSsche Methode auf den Fall der Strahlung an, so wird man ein kanonisches Ensemble konstruieren müssen, dessen Systeme aus dem ponderablen Körper samt den Resonatoren der Frequenz  $\nu$  bestehen; für die Verteilung kann man den Ausdruck

$$N e^{\frac{\Psi - \epsilon - (r_1 + r_2 + \dots)q}{\theta}} d\lambda$$

annehmen, wo  $\epsilon$  die Energie des ponderablen Körpers allein ist und  $r_1, r_2, \dots$  die Anzahlen der Energieelemente bedeuten, die auf den ersten, zweiten usw. Resonator fallen. Berechnet man wieder die mittlere Energie eines Moleküls des Körpers und eines Resonators, so gelangt man zur PLANCKSchen Formel.

Wenn die beiden Methoden auch verschieden aussehen, so hängen sie doch zusammen. Das Bindeglied ist das, was GIBBS ein „mikrokanonisches Ensemble“ nennt, ein Begriff, der mit der BOLTZMANNschen „Ergode“ identisch ist.

Das mikrokanonische Ensemble erhält man als Grenzfall aus dem kanonischen. Man kann nämlich in einfachen Fällen beweisen und in andern — glauben, dass, wenn die Anzahl der Bestimmungsstücke sehr gross ist, alle die Systeme repräsentierenden Punkte in der Nähe einer Fläche, nämlich  $\epsilon = \text{const}$ , des  $2s$ -dimensionalen Raumes zusammengedrängt sind. Denkt man sie sich wirklich nur auf dieser  $(2s - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit in geeigneter Weise verteilt, so hat man eine „mikrokanonische“ Verteilung vor sich; hier ist allen Systemen dieselbe Energie  $\epsilon$  vorgeschrieben.

Dieses mikrokanonische Ensemble aber ist nun der ersten,

BOLTZMANNschen Betrachtungsweise äquivalent. Betrachtet man nämlich z. B. ein einatomiges Gas von  $n$  Molekülen, und achtet man nur auf die Geschwindigkeitskomponenten, nicht aber auf die Lagen, so entspricht nach der BOLTZMANNschen Methode jedem Versuche eine bestimmte Verteilung der  $n$  Moleküle auf die  $k$  Volumelemente des dreidimensionalen Geschwindigkeitsdiagramms. Statt dieses einen zeichnen wir nun aber  $n$  Diagramme, für jedes Molekül eins, derart, dass jedes Diagramm nichts weiter zeigt, als in welchem Volumelemente das betreffende Molekül bei dieser Verteilung liegt. Alle diese  $n$  dreidimensionalen Räume fassen wir nun zu einem  $3n$ -dimensionalen Raume zusammen, dessen „Projektionen“ sie bilden. Das ist dann der GIBBSsche vieldimensionale Raum, denn in ihm wird offenbar eine Verteilung, d. h. der Zustand des ganzen Systems, durch einen einzigen Punkt charakterisiert. Das Volumelement von GIBBS ist das Produkt von  $n$  BOLTZMANNschen Volumelementen. Um jetzt ein mikrokanonisches Ensemble zu bekommen, hat man nur die Verteilungen als gültig anzusehen, wo die Energie den richtigen Wert hat; die zugehörigen Punkte liegen also im  $3n$ -dimensionalen Raume auf der Fläche  $\epsilon = \text{konst}$ , und wenn wir bei unserem Lotteriespiel die Wahrscheinlichkeit jeder Kombination, die das richtige  $\epsilon$  gab, als gleich gross angesehen haben, so läuft das darauf hinaus, dass zwischen den Anzahlen der Systeme, die den verschiedenen Elementen der  $\epsilon$ -Fläche entsprechen, gerade die Verhältnisse bestehen, die für ein mikrokanonisches Ensemble charakteristisch sind. Das ist der Zusammenhang zwischen den Methoden von GIBBS und BOLTZMANN.

Bei alledem muss es das Ziel bleiben, die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen durch die Betrachtung der realen Vorgänge zu ersetzen, wie denn auch BOLTZMANN sein  $H$ -Theorem bewies, indem er zeigte, dass die Grösse  $H$  wirklich immer ihrem kleinsten Werte zustrebt. Ferner bleibt die Aufgabe, die Proportionalität des Energieelements  $q$  mit der Frequenz  $\nu$  zu verstehen; dass keine andere Annahme, etwa  $q$  proportional  $\nu^2$ , zulässig ist, folgt daraus, dass die PLANCKsche Formel dann nicht das WIENsche Verschiebungsgesetz ergeben würde.

Es bleiben für die Zukunft noch manche Rätsel zu lösen.