

## SUR L'APPLICATION AU RAYONNEMENT DU THÉOREME DE L'ÉQUIPARTITION DE L'ÉNERGIE <sup>1)</sup>

1. Parmi les phénomènes physiques, il n'y en a guère qui soient plus mystérieux et plus difficiles à dévoiler que ceux du rayonnement calorifique et lumineux.

Il est vrai que, depuis KIRCHHOFF, on sait que le rapport entre le pouvoir émissif  $E$  et le pouvoir absorbant  $A$  d'un corps est indépendant de sa nature spéciale, et que la valeur de ce rapport ou, ce qui revient au même, l'intensité du rayonnement d'un corps noir a été déterminée par de nombreuses recherches expérimentales. De plus, une heureuse application des principes de la thermodynamique a permis, à BOLTZMANN et à M. W. WIEN, d'arriver à des lois générales importantes, qui ont été pleinement vérifiées par l'expérience. Mais, malgré tout cela, les idées qui avaient cours jusque vers la fin du siècle passé ne suffisaient pas à faire comprendre pourquoi un morceau de fer, par exemple, n'émet pas de lumière à la température ordinaire.

Si le métal contient des particules qui peuvent vibrer avec une fréquence déterminée par leur nature, comment se fait-il que ces vibreurs restent entièrement muets tant qu'on n'a pas atteint une température suffisamment élevée? Et si, au lieu de se figurer de tels vibreurs, on préfère penser à des mouvements irréguliers dans la matière, produisant dans l'éther un pareil état, que nous décomposons en vibrations harmoniques par un procédé arbitraire et artificiel, comment comprendre alors que, dans cette décomposition, les hautes fréquences disparaissent complètement quand l'énergie totale diminue? On ne peut pas admettre qu'il n'y ait aucune connexion entre les ondes lumineuses et les phénomènes qui se passent à l'intérieur d'un corps froid, car, après tout, le corps *absorbe* de la lumière quoi qu'il n'en émette pas. Il faudra donc inventer un mécanisme qui permette le passage d'énergie,

<sup>1)</sup> Rapport à la Réunion Solvay, novembre 1911. Gauthiers-Villars, Paris, 1912.

sous forme de vibrations rapides, de l'éther à la matière pondérable, mais qui exclue le passage dans la direction opposée.

Ce sont des questions de ce genre, auxquelles M. PLANCK a trouvé une réponse par sa remarquable hypothèse des *éléments d'énergie*, hypothèse qui a trouvé des vérifications inattendues et qui mérite bien d'être le sujet principal de nos discussions. Avant d'y entrer, il conviendra cependant de nous rendre compte bien clairement de l'insuffisance des anciennes théories. C'est ce que je tâcherai de faire en précisant un peu les difficultés que je viens de signaler en termes généraux.

2. Considérons une enceinte qui est parfaitement réfléchissante du côté intérieur et qui entoure un corps pondérable quelconque maintenu à une température déterminée  $T$ , le reste de l'espace étant occupé par l'éther. Entre ce milieu et le corps, il s'établira un état d'équilibre caractérisé par la quantité d'énergie qui se trouve dans l'unité de volume de l'éther et par la distribution de cette énergie entre les différentes longueurs d'onde. Désignons par

$$F(\lambda, T)d\lambda,$$

l'énergie du rayonnement par unité de volume pour autant qu'elle appartient aux rayons dont la longueur d'onde est comprise entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ . Selon la loi de KIRCHHOFF, la fonction  $F$  sera indépendante de la nature spéciale du corps pondérable, et d'après les lois de BOLTZMANN et de WIEN, elle peut être mise sous la forme

$$F(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} \varphi(\lambda T), \quad (1)$$

où il n'y a plus qu'une fonction à une seule variable, savoir le produit  $\lambda T$ .

Or, comme Lord RAYLEIGH <sup>1)</sup> l'a reconnu le premier, on peut déterminer la forme de cette fonction en appliquant à l'éther et à la matière pondérable le théorème de l'équipartition de l'énergie qui joue un rôle si considérable dans les théories moléculaires. On peut l'énoncer comme il suit. Si deux corps ou systèmes, qui peuvent échanger entre eux de la chaleur, sont de telle nature que, pour chacun d'eux, l'énergie cinétique intérieure peut être représentée par une somme

$$\Sigma \frac{1}{2} a_i q_i^2,$$

<sup>1)</sup> Phil. Mag. 49, 539, 1900.

où les grandeurs  $\dot{q}$  sont des vitesses dans le sens de LAGRANGE, dont le nombre est égal à celui des degrés de liberté, alors l'équilibre thermique, c'est-à-dire l'égalité de température des deux systèmes, exige que leurs énergies cinétiques soient proportionnelles aux nombres de leurs degrés de liberté. On peut dire aussi qu'en moyenne les systèmes auront pour chaque degré de liberté la même quantité d'énergie cinétique, quantité qu'on peut déterminer en considérant un cas simple, celui, par exemple, d'un gaz monoatomique.

Ecrivons, avec M. PLANCK,  $\frac{3}{2}kT$  pour l'énergie cinétique moyenne d'une molécule gazeuse à la température  $T$ ; nous devons alors attribuer à chaque degré de liberté l'énergie cinétique  $\frac{1}{2}kT$ .

3. La méthode est surtout remarquable parce qu'elle est indépendante des propriétés spéciales des systèmes et de la manière dont s'opèrent les échanges de chaleur. Ainsi, si l'on veut l'appliquer à l'éther contenu dans l'enceinte dont nous avons parlé, il n'est même pas nécessaire de s'y figurer un corps pondérable; on peut considérer l'espace intérieur comme vide de toute matière. Cela posé, on cherchera les différents états élémentaires dans lesquels tous les champs électromagnétiques possibles peuvent être décomposés. Chacun de ces états, qui ne sont autre chose que des systèmes d'ondes stationnaires à fréquences déterminées, correspond à un degré de liberté, et aura, en moyenne, une énergie cinétique  $\frac{1}{2}kT$ .

Bien entendu, on ne trouve pas ainsi l'énergie *totale* du rayonnement noir. En effet, celle-ci se compose de deux parties, l'énergie électrique et l'énergie magnétique, et l'une des deux correspond à l'énergie cinétique d'un système mécanique. Comme, dans le rayonnement, les deux énergies sont égales entre elles, il faudra mettre comme énergie totale pour chaque degré de liberté  $kT$ .

Pour simplifier, on peut donner à l'enceinte la forme d'un parallépipède rectangulaire. Si les longueurs des arêtes sont  $f, g, h$ , on trouve pour le nombre des systèmes d'ondes stationnaires dont la longueur d'onde est comprise entre les limites  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$

$$\frac{8\pi}{\lambda^4} fgh d\lambda.$$

On en déduit, pour l'énergie du rayonnement propre à l'intervalle  $d\lambda$ ,

$$\frac{8\pi kT}{\lambda^4} fgh d\lambda,$$

et pour la fonction cherchée

$$F(\lambda, T) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}. \quad (2)$$

C'est la formule que Lord RAYLEIGH a trouvée et qui a été déduite de nouveau et amplement discutée par M. JEANS <sup>1)</sup>.

4. On reconnaît facilement que le résultat trouvé nous ferait attendre des phénomènes bien différents de ceux qu'on observe. En effet, si, pour calculer l'énergie totale du rayonnement noir, on prend l'intégrale

$$\int F(\lambda, T) d\lambda,$$

entre les limites  $\lambda = 0$  et  $\lambda = \infty$ , on trouve une valeur infinie. Cela signifie que, pour donner une élévation de température finie à un système contenant de l'éther, il faudrait lui communiquer une quantité de chaleur infiniment grande. On peut dire aussi que, dans un système composé de matière et d'éther, l'énergie finira toujours par s'accumuler entièrement dans l'éther, où elle se trouvera sous la forme d'ondes de longueur extrêmement petite. Ce sont là, d'ailleurs, des conséquences inévitables du théorème de l'équipartition, si on l'applique à deux systèmes dont l'un a, grâce à sa parfaite continuité, un nombre infini de degrés de liberté, tandis que ce nombre est fini pour la matière pondérable à cause de sa structure moléculaire. On serait conduit à une conclusion analogue si l'on considérait le partage de l'énergie entre un système de molécules et un fluide ou corps élastique remplissant l'espace sans aucune discontinuité.

N'oublions pas de mentionner que la formule se vérifie d'une manière très satisfaisante pour les grandes longueurs d'onde (les rayons de l'infrarouge extrême) et que c'est pour les vibrations rapides qu'elle est en défaut, le désaccord avec l'expérience s'accroissant de plus en plus à mesure que  $\lambda$  diminue. Les conséquences absolument inadmissibles dont je viens de parler proviennent de ce que l'intégration a été étendue à partir de  $\lambda = 0$ .

<sup>1)</sup> Phil. Mag. 10, 91, 1905. 17, 229, 1909. 17, 773, 1909. 18, 209, 1909.

Du reste, le désaccord commence déjà pour des rayons qu'on peut facilement observer. On doit regarder comme un des résultats les plus importants de l'observation que, pour une température déterminée, la fonction  $F(\lambda, T)$  passe par un maximum pour une certaine valeur de la longueur d'onde. Or, la formule n'en montre rien.

Remarquons aussi qu'il ne peut être question de la proportionnalité, pour une longueur d'onde déterminée, de l'intensité du rayonnement noir avec la température. Si elle existait, il faudrait qu'un corps noir, qui brille très vivement à la température de  $1200^{\circ}$  C., fût encore visible dans l'obscurité à  $15^{\circ}$  C., la température absolue étant, dans ce dernier cas, environ la cinquième partie de ce qu'elle est à  $1200^{\circ}$ . Il devrait en être de même de chaque corps qui n'est pas fort transparent. Une plaque d'argent polie, par exemple, qui à  $15^{\circ}$  C. a un pouvoir absorbant pour la lumière de près de  $\frac{1}{10}$ , devrait luire avec un éclat égal au cinquantième de celui qu'on observe chez un corps noir à  $1200^{\circ}$ . Evidemment, si l'on veut attribuer à la plaque une certaine émission, elle doit être des milliers de fois plus faible. Nous nous retrouvons toujours devant cette énigme: pourquoi un corps froid, tout en pouvant absorber les vibrations lumineuses qui lui viennent du dehors, n'émet-il pas la moindre trace de lumière?

5. Y a-t-il moyen d'échapper, soit au théorème de l'équipartition en général, soit à son application au problème qui nous occupe? Quant à la première question, il faut se rappeler que la démonstration du théorème est basée sur des considérations de probabilité; on regarde l'état qui se réalise dans un système composé d'innombrables particules comme l'état *le plus probable*. Cela exige que, dans les raisonnements, on ne se borne pas à un seul état, mais qu'on fasse intervenir un grand nombre d'états plus ou moins différents. On peut, par exemple, mesurer la probabilité des états qui, dans le cours des mouvements intérieurs, se succèdent dans un système, par les intervalles de temps pendant lesquels ils existent. Des écarts tant soit peu considérables de l'état le plus probable sont limités à des intervalles tellement courts qu'ils deviennent inaccessibles à l'observation, et toutes nos expériences et mesures ne nous font connaître que cet état le plus probable qui existe pendant la presque totalité du temps.

Une autre méthode consiste à considérer un grand nombre ou assemblage de systèmes, qui sont des copies les unes des autres, mais qui, à un moment déterminé, se trouvent dans des *phases* bien différentes. De tels *ensembles* peuvent être conçus de plusieurs façons, quoiqu'on doive s'imposer cette restriction qu'au point de vue statistique l'état de l'ensemble soit stationnaire. Après avoir fait le choix, on mesure la probabilité d'un état quelconque par le nombre de fois qu'il se trouve parmi les systèmes de l'ensemble, et l'on admet que nos observations sur un corps réel nous font connaître l'état qui, dans l'ensemble, se montre le plus fréquemment.

Ici encore, des écarts un peu considérables se montrent très rarement. C'est pour cette raison que, pour les grandeurs mesurables qui se rapportent au système le plus probable, on peut aussi substituer les moyennes des valeurs qui se trouvent dans l'ensemble.

Enumérons brièvement quelques ensembles qu'on a imaginés. D'abord, on peut se figurer un nombre de systèmes qui, à un même instant, reproduisent tous les états qui se succèdent dans le cours du temps dans un système réel. La considération d'un tel assemblage sera équivalente à l'étude de la probabilité de ces états successifs.

En second lieu, on peut introduire un ensemble de l'espèce que BOLTZMANN a désignée comme *ergodique* et GIBBS comme *micro-canonique*. C'est un ensemble beaucoup plus vaste que le précédent; il embrasse tous les états qui sont compatibles avec une valeur donnée de l'énergie totale. Enfin, il y a les ensembles *canoniques* inventés par GIBBS. Dans ceux-ci, on admet, même pour l'énergie, toutes les valeurs imaginables. Seulement, ces valeurs sont distribuées sur les systèmes de l'assemblage suivant une certaine loi qui a été choisie de telle façon que, dans la grande majorité des systèmes, l'énergie puisse être considérée comme de la même grandeur. Il en résulte qu'en fin de compte un ensemble canonique est équivalent à un ensemble micro-canonique.

Ces différentes manières d'appliquer les méthodes du calcul des probabilités donnent lieu à nombre de questions intéressantes, sur lesquelles je ne puis m'étendre ici. On ne saurait nier, à ce qu'il me semble, que leur emploi n'implique toujours un élément d'incertitude, l'identité de l'état que l'on considère comme le plus probable avec l'état réel ne pouvant guère être démontrée avec une rigueur

entièrement satisfaisante. Sans doute, on pourrait avoir plus de confiance dans les résultats, si l'on pouvait y arriver au moyen du théorème  $H$  de BOLTZMANN, je veux dire si l'on pouvait introduire dans chaque cas une grandeur analogue à la fonction  $H$  de ce savant, et démontrer que, dans un seul et même système, cette grandeur va nécessairement en diminuant jusqu'à une certaine limite qui caractérise l'état d'équilibre.

Malheureusement, ce n'est que dans les cas très simples, tel que celui d'un mélange gazeux, que cette voie à une démonstration du théorème de l'équipartition nous est ouverte, et, en général, on devra avoir recours aux méthodes un peu moins sûres que je viens d'indiquer. En parlant de leur emploi, je n'ai pas voulu perdre de vue une certaine réserve, mais, d'un autre côté, il importe de ne pas exagérer la prudence. Il est toujours permis d'espérer qu'on pourra ébranler le théorème de l'équipartition par une critique de la démonstration qu'on en donne, mais je crois que c'est là un espoir bien faible et que, dans la mécanique statistique, les méthodes du calcul des probabilités conduisent à des conséquences qui sont elles-mêmes très probables. Aussi me servirai-je de ces méthodes sans trop de scrupules.

C'est celle des ensembles canoniques qui nous conduira au but le plus rapidement.

6. Tous les physiciens savent ce qu'on entend par un ensemble canonique. Nous désignerons par  $q_1, q_2, \dots$  les coordonnées, dans le sens de LAGRANGE, qui déterminent la position et la configuration d'un système, par  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$  les vitesses, et par  $p_1, p_2, \dots$  les moments correspondants, enfin par  $\mathcal{E}$  l'énergie totale. Chaque système peut être représenté par un point dans un espace polydimensionnel, dans lequel les grandeurs  $q_1, q_2, \dots, p_1, p_2, \dots$  sont prises pour coordonnées; pour abrégé, on peut dire que le système se trouve au point  $(q_1, q_2, \dots, p_1, p_2, \dots)$  de cet espace.

Soit  $d\tau$  un élément de l'extension  $(q_1, q_2, \dots, p_1, p_2, \dots)$ . On aura un ensemble canonique si le nombre des systèmes qui se trouvent dans un tel élément est donné par

$$C e^{-\mathcal{E}/\Theta} d\tau, \quad (3)$$

où  $C$  et  $\Theta$  sont des constantes. La dernière, le module de l'ensemble, jouera le rôle de la température.

La propriété de l'ensemble d'être stationnaire au point de vue statistique peut être démontrée au moyen du théorème de LIOUVILLE :

*Si les systèmes, qui se trouvent à un certain moment  $t$  dans un élément  $d\tau$  de l'espace  $(q_1, q_2, \dots, p_1, p_2, \dots)$ , occupent l'élément  $d\tau'$  à un instant postérieur, on aura*

$$d\tau' = d\tau. \quad (4)$$

Ce théorème, à son tour, est une conséquence des équations du mouvement dans la forme que HAMILTON leur a donnée, et ainsi les résultats, auxquels on arrive par la considération d'un ensemble canonique, reposent, en fin de compte, sur l'hypothèse que, quels que soient les phénomènes qui se passent dans le système étudié, les équations de HAMILTON y soient applicables.

7. Nous allons examiner maintenant si, effectivement, on peut construire un ensemble canonique stationnaire avec un système composé de matière et d'éther et entouré d'une enveloppe que nous supposons parfaitement conductrice et, par conséquent, parfaitement réfléchissante.

On peut remarquer en premier lieu que, pour cela, il n'est pas du tout nécessaire de donner une explication mécanique des phénomènes électromagnétiques. Il suffira que les équations qui déterminent ces phénomènes puissent être écrites dans la forme des équations de HAMILTON.

Figurons-nous que la matière pondérable contienne des électrons mobiles et prenons pour point de départ les équations fondamentales

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c} C_x, \quad \dots, \quad (7)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial y} - \frac{\partial D_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \dots, \quad (8)$$

dans lesquelles  $c$  représente la vitesse de la lumière,  $\rho$  la densité de



la charge d'un électron,  $D$  le déplacement diélectrique et en même temps (grâce au choix des unités) la force électrique,  $H$  la force magnétique et  $C$  le courant électrique. Ce dernier se compose du courant de déplacement  $\dot{D}$  et du courant de convection, pour lequel on peut écrire  $\rho v$ , si  $v$  est la vitesse d'un point d'un électron. A ces équations, il faut joindre les conditions qu'en chaque point de la paroi le vecteur  $D$  doit être normal et le vecteur  $H$  parallèle à sa surface (je suppose que les électrons n'atteignent pas la paroi, de sorte qu'on y a  $\rho = 0$ ).

Quant aux forces exercées par le champ électromagnétique sur les électrons, leurs composantes par unité de charge sont données par les expressions

$$D_x + \frac{1}{c} (v_y H_z - v_z H_y), \dots \quad (9)$$

Par un calcul un peu compliqué, mais qui n'offre aucune difficulté, on déduit de ce qui précède l'équation suivante qui exprime un principe analogue à celui de HAMILTON:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L} - \mathcal{U}) dt = 0. \quad (10)$$

Ici, l'énergie électrique est représentée par  $\mathcal{U}$ , l'énergie magnétique par  $\mathcal{L}$ <sup>1)</sup>, et le signe de variation  $\delta$  se rapporte au passage d'un état de choses réel à un état fictif que je nommerai l'état ou le mouvement varié, et que nous précisons comme il suit. A partir de l'état réel qui existe à un moment quelconque  $t$ , nous donnons des déplacements infiniment petits aux électrons et des changements infiniment petits aux composantes  $D_x, D_y, D_z$ , tels que chaque élément de volume d'un électron conserve sa charge, que l'équation (5) ne cesse pas d'être vraie et que  $D$  reste normal à la paroi. Ces déplacements et variations peuvent être des fonctions continues quelconques du temps; quand ils ont été choisis comme telles, nous connaissons pour chaque instant la position variée des électrons et le champ électrique varié dans l'éther. Le mouvement varié n'est autre chose que la succession des états variés, et les

<sup>1)</sup> Je m'écarte de la notation usuelle ( $T$  pour l'énergie cinétique ou magnétique,  $\mathcal{L}$  pour la fonction de LAGRANGE), parce que le symbole  $T$  est déjà employé pour la température.

nouvelles vitesses des électrons, les valeurs de

$$\frac{\partial D_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial D_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial D_z}{\partial t},$$

et les grandeurs

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} + \rho v_x, \quad \dots,$$

qu'on peut appeler les *composantes du courant varié*, se trouvent complètement définies.

Entendons ensuite par  $H$  le vecteur déterminé par les équations (6) et (7) avec la condition d'être tangentiel à la paroi <sup>1)</sup> et calculons la valeur de  $\mathcal{L}$  pour les deux mouvements par la formule

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int H^2 dS, \quad (11)$$

où  $dS$  est un élément de volume; nous aurons alors la valeur de  $\delta\mathcal{L}$ . Pareillement, nous obtiendrons  $\delta\mathcal{U}$  en prenant pour les deux mouvements l'intégrale

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int D^2 dS. \quad (12)$$

On peut démontrer maintenant que l'équation (10) est toujours vraie, pourvu que les déplacements des électrons et les variations de  $D$  s'annulent aux instants fixes arbitrairement choisis  $t_1$  et  $t_2$ .

Jusqu'ici nous n'avons parlé ni des particules sans charge, ni des actions non électromagnétiques. On en tiendra compte en comprenant sous le symbole  $\mathcal{U}$  l'énergie potentielle correspondant à ces actions, et sous  $\mathcal{L}$  l'énergie cinétique des molécules ou atomes. Si nous voulons attribuer aux particules chargées une certaine masse matérielle,  $\mathcal{L}$  devra contenir également l'énergie cinétique qui est propre à cette masse.

8. Pour passer de l'équation générale (10) à des formules qui ont la forme des équations de HAMILTON, il est nécessaire d'introduire un système de *coordonnées*  $q$ , propre à définir la position des particules de différentes espèces et le champ électrique dans l'éther.

<sup>1)</sup> Il existe toujours un seul vecteur qui a ces propriétés.

Choisissons d'abord un nombre de coordonnées, que j'appellerai toutes  $q_1$ , qui déterminent les positions des particules non chargées, et un système de grandeurs  $q_2$ , qui fixent la position des électrons. Cela fait, il nous reste à choisir les coordonnées pour le champ électrique dans l'éther. Or, quel que soit ce champ, on peut toujours le décomposer en deux parties superposées, dont la première est le champ qui existerait si les électrons se trouvaient en repos dans les positions indiquées par les coordonnées  $q_2$ , tandis que la seconde satisfait partout à la relation

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

chacune des deux parties remplissant les conditions aux parois. La première partie est entièrement déterminée par les coordonnées  $q_2$ , et si l'on donne à l'enceinte la forme d'un parallépipède rectangulaire, le théorème de FOURIER nous permet d'écrire pour la seconde partie

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \Sigma(q_3\alpha + q'_3\alpha') \cos \frac{u\pi}{f} x \sin \frac{v\pi}{g} y \sin \frac{w\pi}{h} z, \\ D_y &= \Sigma(q_3\beta + q'_3\beta') \sin \frac{u\pi}{f} x \cos \frac{v\pi}{g} y \sin \frac{w\pi}{h} z, \\ D_z &= \Sigma(q_3\gamma + q'_3\gamma') \sin \frac{u\pi}{f} x \sin \frac{v\pi}{g} y \cos \frac{w\pi}{h} z. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ici, on a pris pour axes des coordonnées trois arêtes du parallépipède, et l'on a de nouveau représenté par  $f, g, h$  les longueurs des arêtes. Les coefficients  $u, v, w$  sont des nombres entiers et positifs, et pour chaque système de leurs valeurs on a introduit deux directions déterminées par les cosinus  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ , ces directions étant arbitrairement choisies, à la condition cependant d'être perpendiculaires entre elles et à celle qui est déterminée par  $u/f, v/g, w/h$ . De plus, pour chaque système  $(u, v, w)$ , il y a deux coefficients  $q_3$  et  $q'_3$ ; enfin, les sommes doivent être étendues à toutes les combinaisons possibles des  $u, v, w$ . Ce sont les grandeurs  $q_3, q'_3$ , indiquées dans la suite par le seul symbole  $q_3$ , qui seront les coordonnées pour l'éther.

Les deux états élémentaires, qui correspondent à un système de valeurs  $u, v, w$ , peuvent être appelés *conjugués*. Ils ont chacun

une longueur d'onde

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{u^2/f^2 + v^2/g^2 + w^2/h^2}}. \quad (15)$$

9. Comme les grandeurs  $q_1, q_2, q_3$  déterminent la position de toutes les particules et le champ électrique dans l'éther, l'énergie électrique et potentielle  $\mathcal{U}$  peut être exprimée en fonction de ces coordonnées. D'un autre côté, on voit facilement que les vitesses  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$  nous font connaître le mouvement des particules et le courant électrique en chaque point de l'espace, c'est-à-dire les grandeurs dont dépend l'énergie magnétique et cinétique  $\mathcal{L}$ . Par un calcul qu'il serait trop long de répéter ici, je trouve

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \frac{1}{16} fgh \Sigma q_3^2, \quad (16)$$

$\mathcal{U}_0$  étant une fonction des coordonnées  $q_1, q_2$ , et

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \frac{fgh}{64\pi^2 c^2} \Sigma \lambda^2 \dot{q}_3^2 + \Sigma l_{ij} \dot{q}_{2i} \dot{q}_{3j}, \quad (17)$$

où  $\mathcal{L}_0$  est une fonction homogène du second degré des vitesses  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ . Le dernier terme de  $\mathcal{L}$  contient tous les produits d'un  $\dot{q}_2$  par un  $\dot{q}_3$ , chaque produit étant multiplié par un coefficient qui est une fonction des coordonnées de l'électron auquel se rapporte  $\dot{q}_{2i}$ . En supposant que les électrons sont des sphères de rayon  $R$  portant une charge superficielle  $e$ , et en désignant par  $q_{(1)}, q_{(2)}, q_{(3)}$  les coordonnées rectangulaires du centre d'une de ces particules, je trouve pour le coefficient  $l_{(1)j}$ , correspondant à la première de ces coordonnées et à un  $q_{3j}$  quelconque,

$$l_{(1)j} = \frac{\alpha \lambda^3 e}{8\pi^3 c^2 R} \sin \frac{2\pi R}{\lambda} \cos \frac{u\pi}{f} q_{(1)} \sin \frac{v\pi}{g} q_{(2)} \sin \frac{w\pi}{h} q_{(3)}. \quad (18)$$

Comme  $\mathcal{L}$  est une fonction homogène du second degré des vitesses  $\dot{q}$  tandis que  $\mathcal{U}$  dépend seulement des coordonnées, il y a une étroite analogie avec les énergies cinétique et potentielle des systèmes que l'on considère en mécanique. Seulement, ces derniers ont ordinairement un nombre fini de coordonnées, tandis que le système dont nous nous occupons maintenant en a une infinité. Pour éviter les difficultés qui en pourraient résulter, j'imaginerai que, par l'introduction de nouvelles liaisons, tous les champs électriques représentés par les formules (14), pour lesquels la longueur

d'onde serait inférieure à une certaine limite  $\lambda_0$ , soient exclus <sup>1)</sup>. Sur le système fictif  $S$  qu'on obtient de cette manière, on peut raisonner exactement comme on le fait sur les systèmes mécaniques, et l'on cherchera à se former une idée de ce qui se passe dans le système réel en examinant ce que deviennent à la limite  $\lambda_0 = 0$  les résultats obtenus pour le système fictif <sup>2)</sup>.

10. En premier lieu, l'équation générale (10) conduit maintenant pour le système  $S$  aux équations de LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial (\mathcal{L} - \mathcal{U})}{\partial q}. \quad (20)$$

Après y avoir introduit les valeurs (16) et (17), on peut passer à la limite  $\lambda_0 = 0$ . On arrive ainsi à des formules qui déterminent, d'une part le champ électromagnétique provenant du mouvement des électrons, et, d'autre part, l'influence du champ électromagnétique sur ce mouvement même.

En second lieu on peut, toujours pour le système fictif  $S$ , intro-

<sup>1)</sup> Si l'on veut exclure un champ élémentaire  $A$  correspondant à des valeurs déterminées de  $u, v, w, \alpha, \beta, \gamma$ , il suffit d'imposer au déplacement diélectrique la condition

$$\int \left( \alpha D_x \cos \frac{w\pi}{f} x \sin \frac{v\pi}{g} y \sin \frac{u\pi}{h} z + \beta D_y \sin \frac{w\pi}{f} x \cos \frac{v\pi}{g} y \sin \frac{u\pi}{h} z + \right. \quad (19) \\ \left. + \gamma D_z \sin \frac{w\pi}{f} x \sin \frac{v\pi}{g} y \cos \frac{u\pi}{h} z \right) dS = 0.$$

En effet, tous les champs élémentaires déterminés par les coordonnées  $q_i$  satisfont à cette équation, et il en est de même aussi bien du champ  $q_2$  conjugué avec  $A$  que de tous les autres champs  $q_i$ . L'état  $A$  est le seul qui ne remplisse pas la condition et qui se trouve ainsi exclu.

Il va sans dire qu'il est bien difficile de se représenter la nature des liaisons requises. Cependant, on peut remarquer que, d'après l'équation (19), elles s'expriment par des relations homogènes et linéaires entre les composantes du déplacement diélectrique en différents points de l'espace.

<sup>2)</sup> Il faut remarquer qu'en se bornant aux états pour lesquels  $\lambda > \lambda_0$ , on se met dans l'impossibilité de pénétrer tous les détails des phénomènes. On sait, par exemple, que le champ électrique, qui entoure un électron se mouvant avec la vitesse  $v$ , diffère du champ électrostatique d'une manière sensible, quand les termes de l'ordre  $v^2/c^2$  ne peuvent pas être négligés.

Or le champ accessoire, qu'il faut superposer au champ électrostatique pour avoir l'état réel, rentre dans notre analyse dans les formules (14), et il est clair que, pour le représenter exactement, il faut aller jusqu'aux termes pour lesquels la longueur d'onde est inférieure au rayon  $R$  de l'électron.

Par conséquent, si l'on prend  $\lambda_0$  beaucoup plus grand que  $R$ , cela implique qu'on néglige le champ accessoire dont je viens de parler, ce qui n'est permis que pour des vitesses petites par rapport à  $c$ . En réalité, cette condition se trouve remplie. Remarquons cependant qu'on peut prendre pour  $\lambda_0$  une longueur quelconque si petite qu'on voudra.

duire, au lieu des vitesses  $\dot{q}$ , les moments  $p$  correspondants, définis par

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}}, \quad (21)$$

si  $\mathcal{E}$  est l'énergie totale  $\mathcal{L} + \mathcal{U}$ .

En considérant  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{E}$  comme des fonctions des coordonnées et moments, on arrive aux équations de HAMILTON

$$\dot{p} = - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q}. \quad (22)$$

Conjointement avec (21), elles nous conduisent au théorème de LIOUVILLE, et il n'y a donc aucune objection à former avec le système fictif  $S$  un ensemble canonique stationnaire.

11. Parmi les propriétés d'un tel ensemble, il y en a une qui est d'un intérêt spécial pour notre but. Supposons qu'une des coordonnées  $q$  ou un des moments  $p$  n'entre dans l'expression de l'énergie  $\mathcal{E}$  que dans un seul terme de la forme  $aq^2$  ou  $bp^2$ . On démontre alors que la valeur moyenne de la partie de l'énergie qui est indiquée par ce terme, c'est-à-dire de la partie de l'énergie qui correspond à l'ordonnée ou au moment en question, est donnée par la moitié du module  $\Theta$ .

Ce résultat s'applique à quelques-unes des variables que nous avons à considérer. En premier lieu, si  $m$  est la masse d'une particule non chargée, disons d'un atome ou molécule d'un corps  $M$  placé dans l'enceinte, et  $q_1$  une des coordonnées rectangulaires du centre de gravité de cette particule, l'énergie  $\mathcal{L}$  contient le terme  $\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2$  ou  $p_1^2/2m$ , si  $p_1$  est le moment qui correspond à la coordonnée  $q_1$ . Evidemment, ce moment ne se retrouve dans aucun autre terme de  $\mathcal{L}$ ; la valeur moyenne dans l'ensemble canonique de la partie de  $\mathcal{L}$  qui lui correspond est  $\frac{1}{2}\Theta$ , et l'on trouve  $\frac{3}{2}\Theta$  pour la valeur moyenne de l'énergie due au mouvement du centre de gravité de la molécule. En effet, on peut répéter le raisonnement précédent, en entendant par  $q_1$  la deuxième ou la troisième coordonnée de ce point. Fixons maintenant notre attention sur un nombreux groupe de molécules égales contenues dans le corps  $M$ ; soit  $\nu$  le nombre de ces molécules. L'énergie totale, qu'elles possèdent en vertu du mouvement de leurs centres de gravité, aura dans l'ensemble canonique la valeur moyenne  $\frac{3}{2}\nu\Theta$ , et il faudra lui attribuer la même valeur dans le corps réel  $M$ .

Mais nous savons déjà que l'énergie en question est égale à  $\frac{3}{2}k\nu T$ . Il faut donc que

$$(23) \quad \Theta = kT.$$

En second lieu, chaque coordonnée  $q_3$  de l'éther ne se montre que dans un seul terme

$$\frac{1}{16} fgh q_3^2$$

de l'expression pour l'énergie électrique.

Nous en concluons que, dans l'ensemble canonique, l'énergie qui appartient à une seule coordonnée  $q_3$  est donnée, en moyenne, par

$$\frac{1}{2} \Theta = \frac{1}{2} kT.$$

Nous nous trouvons donc ramenés au théorème de l'équipartition, quoique la forme soit un peu différente de celle sous laquelle il a été présenté au paragraphe 2. Un dernier pas dans le raisonnement nous conduira de nouveau à la formule de Lord RAYLEIGH. En effet, comme le nombre des états élémentaires  $q_3$  pour lesquels la longueur d'onde est comprise entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ , est égal à

$$\frac{8\pi}{\lambda^4} fgh d\lambda,$$

on trouve

$$\frac{4\pi kT}{\lambda^4} fgh d\lambda$$

pour l'énergie électrique moyenne dans les systèmes de l'ensemble canonique, en tant que cette énergie appartient à l'intervalle  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ . L'énergie doit avoir cette même valeur pour le système que nous étudions, ce qui donne

$$\frac{4\pi kT}{\lambda^4} d\lambda$$

pour l'unité de volume. Remarquons enfin que, dans l'éther qui entoure le corps  $M$ , l'énergie magnétique est égale à l'énergie électrique, et nous voyons qu'il faut doubler la valeur trouvée et que la fonction  $F$  doit avoir la forme que lui assigne l'équation (2).

Il importe de remarquer que cette démonstration de la formule de RAYLEIGH est tout à fait générale. Elle embrasse tous les modes de mouvement des électrons, translations et rotations, et toutes

les actions qui s'exercent entre ces particules et la matière; nous n'avons pas eu à distinguer les électrons libres et ceux qui vibrent autour d'une position d'équilibre. Enfin, bien que ce soit d'une manière implicite, il a été tenu compte de l'influence du rayonnement sur le mouvement des électrons et de la modification que ces particules produisent dans les rayons par une espèce de diffraction et qui peut être accompagnée d'un changement dans la fréquence conforme au principe de DOPPLER, si les électrons ont un mouvement de translation.

12. Il est intéressant de calculer encore, pour l'ensemble canonique considéré, la valeur moyenne de la vitesse de translation  $v$  d'un électron. A cet effet, il faut remarquer que les composantes de cette vitesse entrent dans l'expression (17) pour  $\mathcal{L}$  de trois manières différentes. Il y a d'abord une partie  $\mathcal{L}_1$ , qui est une fonction homogène du second degré des trois composantes de  $v$ . Une deuxième partie  $\mathcal{L}_2$  contient les produits de ces trois grandeurs avec les vitesses des autres électrons. Enfin, il faut tenir compte de ceux parmi les termes de la dernière somme en (17) qui se rapportent à l'électron qu'on considère.

Supposons que la distance de cette particule à celui des autres électrons qui en est le plus rapproché, ainsi que la plus petite distance à la paroi soit beaucoup plus grande que le diamètre  $2R$ . Dans ces circonstances, on peut négliger  $\mathcal{L}_2$ , et l'on peut prendre pour  $\mathcal{L}_1$

$$\frac{1}{2}mv^2,$$

où

$$m = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \quad (24)$$

est la masse électromagnétique de l'électron (pour de petites vitesses). C'est cette énergie  $\frac{1}{2}mv^2$  qu'on peut appeler l'énergie cinétique de la particule.

La valeur moyenne cherchée est donnée par

$$\overline{v^2} = \frac{\int v^2 e^{-\mathcal{E}/\Theta} d\tau}{\int e^{-\mathcal{E}/\Theta} d\tau}, \quad (25)$$

où les intégrations doivent être étendues à toute l'extension de l'ensemble canonique. En les effectuant, je trouve



$$\frac{1}{2} m' \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT, \quad (26)$$

le facteur  $m'$  étant déterminé par

$$m' = m - \frac{e^2}{6\pi^3 c^2 R^2} \int_{\lambda_0}^{\infty} \sin^2 \frac{2\pi R}{\lambda} d\lambda. \quad (27)$$

Si l'on suppose maintenant que la limite inférieure  $\lambda_0$  des longueurs d'onde (§ 9) est beaucoup plus grande que le diamètre d'un électron, on peut remplacer  $\sin 2\pi R/\lambda$  par  $2\pi R/\lambda$ . Par cela, le dernier terme devient

$$\frac{2e^2}{3\pi c^2 \lambda_0},$$

ce qui est très petit par rapport à  $m$ . On peut donc négliger cette grandeur, de sorte qu'on a  $m' = m$  et, au lieu de (26),

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT. \quad (28)$$

Cela nous apprend que, lorsqu'on peut faire abstraction des ondes de longueur extrêmement petite, l'énergie cinétique moyenne d'un électron est égale à celle d'une molécule.

Le résultat devient tout autre si la longueur d'onde  $\lambda_0$  est comparable aux dimensions d'un électron ou leur est même inférieure. A la limite  $\lambda_0 = 0$ , le dernier terme de (27) devient égal à  $m$ . On obtient alors  $m' = 0$  et la formule (26) entraîne une valeur infinie pour  $\bar{v}^2$ . Inutile de dire que cette conclusion n'a pas de sens physique, pas plus que les conséquences relatives à l'énergie de l'éther (§ 4) qu'on tire du théorème de l'équipartition, en l'appliquant même aux vibrations les plus rapides.

13. M. VAN DER WAALS junior a eu l'obligeance, il y a déjà quelque temps, de me faire observer que, lorsque les électrons sont dépourvus de masse matérielle, leurs vitesses sont complètement déterminées dès que l'on connaît en tous ses détails le champ électromagnétique. Si, par exemple, on les considère comme des corpuscules de forme invariable, la force et le couple résultants qui proviennent des actions indiquées par les expressions (9) doivent s'annuler, ce qui nous donne les composantes des vitesses de translation et de rotation. Or, comme les équations de HAMILTON fixent

les grandeurs des accélérations, en laissant indéterminées celles des vitesses, elles ne seraient plus applicables et il serait impossible de construire un ensemble canonique dans le sens ordinaire de ces termes. Une remarque analogue a été faite récemment par M. MC LAREN <sup>1)</sup>.

Si l'on se sert des formules développées dans ce qui précède, on ne voit pas au premier abord pourquoi les équations de HAMILTON seraient en défaut. Cependant, en y regardant de plus près, on reconnaît que, si l'on étend les raisonnements à toutes les longueurs d'onde, même les plus petites, on est arrêté précisément par l'obstacle sur lequel M. VAN DER WAALS a appelé l'attention.

En effet, il se trouve que l'expression (17) pour  $\mathcal{L}$  peut alors être mise sous la forme

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}) + \sum_j \left[ \frac{1}{2} \sigma_j \left( \dot{q}_{3j} + \sum_i s_{ij} \dot{q}_{2i} \right)^2 \right], \quad (29)$$

où j'ai posé

$$\sigma_j = \frac{fgh\lambda^2}{32\pi^2c^2},$$

$$s_{ij} = \frac{l_{ij}}{\sigma_j}.$$

Maintenant le terme  $(\mathcal{L})$  contient seulement les vitesses  $\dot{q}_1$ , le dernier terme

$$\sum_j \left[ \frac{1}{2} \sigma_j \left( \sum_i s_{ij} \dot{q}_{2i} \right)^2 \right] \quad (30)$$

de l'expression (29) étant égal à la partie de  $\mathcal{L}_0$  dans la formule (17), qui contient les vitesses des électrons.

Formons les équations de LAGRANGE (20) pour une coordonnée  $q_{2i}$  et pour un  $q_{3j}$ . On trouve

$$\sum_j \left[ \sigma_j s_{ij} \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_{3j} + \sum_i s_{ij} \dot{q}_{2i} \right) \right] + \quad (31)$$

$$+ \sum_j \left[ \sigma_j s_{ij} \left( \dot{q}_{3j} + \sum_i s_{ij} \dot{q}_{2i} \right) \right] = \frac{\partial(\mathcal{L} - \mathcal{U})}{\partial q_{2i}},$$

$$\sigma_j \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_{3i} + \sum_i s_{ij} \dot{q}_{2i} \right) = \frac{\partial(\mathcal{L} - \mathcal{U})}{\partial q_{3j}}, \quad (32)$$

<sup>1)</sup> Phil. Mag. 21, 15, 1911.

où ce sont les premiers termes qui contiennent les accélérations.

Ces termes disparaîtront si, pour un  $i$  arbitrairement choisi, on prend la somme de toutes les équations (32) après les avoir multipliées chacune par le facteur  $s_{ij}$  qui lui correspond, et que la somme soit retranchée de l'équation (31). On obtient alors une relation qui ne contient que des coordonnées et des vitesses et, comme il y a une formule de ce genre pour chaque valeur de  $i$ , on peut, en effet, déterminer toutes les vitesses  $\dot{q}_2$  en fonctions des coordonnées et des vitesses  $\dot{q}_3$ .

Dans ce qui précède, la difficulté a été tournée au moyen de l'artifice des liaisons fictives qui imposent pour la longueur d'onde la limite inférieure  $\lambda_0$  (§ 9). En effet, si dans la somme (30) on omet tous les  $j$  pour lesquels  $\lambda < \lambda_0$ , la somme ne sera plus égale à la partie de  $L_0$  dans la formule (17) qui dépend des vitesses  $\dot{q}_2$  et il faudra ajouter au second membre de (29) une fonction homogène du second degré de ces vitesses. Même, si  $\lambda_0$  est pris beaucoup plus grand que le diamètre d'un électron, la valeur de (30) devient très petite par rapport à la partie de  $L_0$  que je viens de nommer; le terme qu'il faut ajouter à (29) prend alors la forme

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2,$$

si l'on se place dans les conditions indiquées au paragraphe précédent. Tout se passera donc comme si les électrons étaient doués d'une masse  $m$ , non électromagnétique mais matérielle.

L'introduction des liaisons fictives qui assurent l'inégalité  $\lambda > \lambda_0$  m'a paru être le seul moyen d'éviter les complications et les incertitudes qui pourraient résulter de la considération des longueurs d'onde extrêmement petites. Il va sans dire que cette introduction elle-même n'est pas à l'abri des objections. Cependant il ne faut pas perdre de vue que, dans la comparaison avec les expériences, il s'agit de longueurs d'onde bien supérieures à  $\lambda_0$  et qui ne sont nullement atteintes par notre exclusion. Il me semble assez plausible d'admettre à titre d'hypothèse que, lorsque, pour une raison ou une autre (voir le paragraphe suivant), les vibrations les plus rapides n'entrent pas en jeu, les phénomènes dus aux vibrations plus lentes se passeront comme si les petites longueurs d'onde étaient écartées par des liaisons dans le système.

14. On a quelquefois émis l'opinion que la formule pour le rayonnement noir déduite du théorème de l'équipartition serait bien vraie, mais que l'état de choses qu'elle représente ne se montrerait pas dans nos expériences, l'échange d'énergie entre la matière et l'éther s'accomplissant avec une lenteur extrême si l'on en vient aux petites longueurs d'onde. Ainsi, comme M. JEANS s'est une fois exprimé <sup>1)</sup>, le théorème nous ferait bien connaître l'état *normal* d'un système composé de matière et d'éther, mais cet état ne se réaliserait que dans un temps infini, et au point de vue expérimental un autre état, celui peut-être qui est représenté par la formule de M. PLANCK, pourrait bien apparaître comme l'état *final* du système.

Je ne crois pas qu'on puisse venir à bout des difficultés au moyen de cette distinction. On pourrait s'en contenter si ce n'était que pour les ondes très courtes, disons pour l'extrême ultraviolet, que le théorème de l'équipartition conduisit à des conséquences incompatibles avec la réalité. Mais, comme nous l'avons fait remarquer, il y a aussi un désaccord très marqué entre les résultats théoriques et expérimentaux dans les limites du spectre infrarouge et visible. Considérons, par exemple, la lumière jaune, et revenons pour un moment à la plaque d'argent dont il fut question au paragraphe 4, et que nous supposerons placée dans une enceinte à parois parfaitement réfléchissantes. D'après le théorème de l'équipartition, il est certain qu'un système de rayons jaunes, de l'intensité déterminée par la formule de Lord RAYLEIGH et s'entrecroisant dans toutes les directions, pourrait être en équilibre avec la plaque maintenue à la température de 15° C. Or, je ne vois aucune raison pour ne pas admettre, comme on le fait d'ordinaire, que cet équilibre serait dû à l'égalité des quantités de lumière absorbée et émise dans un même intervalle de temps. Il s'ensuit nécessairement, eu égard à ce que nous savons de la grandeur du pouvoir absorbant, que le pouvoir émissif doit avoir la grandeur indiquée au paragraphe 4, et cette grandeur est telle que si, au commencement, les rayons jaunes n'existaient pas dans l'espace entourant la plaque, il en serait rempli dans une fraction extrêmement petite d'une seconde.

En tirant cette conclusion, j'ai admis qu'à une température donnée le pouvoir émissif du métal est toujours le même, que

<sup>1)</sup> Phil. Mag. 10, 91, 1905.

l'espace environnant soit déjà rempli de rayons ou qu'il en soit vide.

15. Tandis que le théorème de l'équipartition ne peut pas rendre compte du maximum de la fonction  $F(\lambda, T)$  pour une certaine valeur  $\lambda_m$  de la longueur d'onde, la formule de M. PLANCK en explique l'existence; elle nous donne pour le produit  $\lambda_m T$ , qui doit être constant selon la loi de WIEN, la relation

$$\lambda_m T = 0,201 \frac{ch}{k}, \quad (33)$$

où  $h$  est la seconde constante que PLANCK a introduite dans la théorie du rayonnement à côté de la constante qui apparaît aussi dans la formule de RAYLEIGH.

On comprend facilement que la formule pour le rayonnement noir doit contenir au moins *deux* constantes, dont la première détermine l'intensité totale

$$\int F(\lambda, T) d\lambda,$$

tandis que la seconde fixe la position du maximum. Il faut, de plus, que ces constantes soient toutes deux de nature universelle, c'est-à-dire que leurs valeurs dépendent de quelque chose qui soit commun à tous les corps pondérables ou bien de quelque chose qui appartienne à l'éther.

Or la charge électrique  $e$  d'un électron, sa masse  $m$  et son rayon  $R$  sont des grandeurs de ce genre, et, en faisant attention aux dimensions, on voit qu'on doit avoir, si la charge est exprimée en mesure électrostatique,

$$h (=) \frac{e^2}{c} (=) cmR, \quad (34)$$

où le signe (=) indique que les deux grandeurs qu'il réunit ne se distinguent que par un facteur numérique indépendant du choix des unités. On a aussi, si l'on écrit  $\bar{v}^2$  pour la moyenne du carré de la vitesse d'un électron à la température  $T$ , et  $l$  pour la distance à laquelle l'énergie potentielle mutuelle  $e^2/l$  de deux électrons est égale à l'énergie  $kT$ ,

$$\lambda_m (=) \frac{c^2 R}{\bar{v}^2} (=) \frac{e^2}{m\bar{v}^2} (=) l. \quad (35)$$

S'il était possible d'établir une formule satisfaisante du rayonnement sans avoir recours à d'autres idées que celles de la théorie ordinaire des électrons, on pourrait trouver pour une de ces équations une déduction théorique et l'on fixerait en même temps la valeur du coefficient numérique. Mais, d'après tout ce qui vient d'être dit, on ne peut guère espérer y réussir ; il semble bien que la constante  $h$  devra être interprétée au moyen de considérations d'un ordre entièrement différent. Comme ce sont les équations de HAMILTON qui constituent le véritable fondement du théorème de l'équipartition, on peut même prévoir qu'il faudra imaginer des actions auxquelles ces équations ne soient pas applicables et qui soient de toute autre nature que celles dont on s'occupe dans les problèmes mécaniques.

16. Je n'ai pas à discuter, dans ce premier Rapport, l'hypothèse des *éléments* ou *unités d'énergie* qui a été proposée par M. PLANCK. Cependant, je me permettrai d'entrer dans quelques considérations au sujet de la constitution du rayonnement noir dans l'éther.

Supposons que l'émission de la lumière et de la chaleur rayonnante se fasse toujours par des quantités finies d'énergie ayant une grandeur déterminée pour chaque fréquence. Alors, il y a encore deux possibilités. Les éléments d'énergie peuvent conserver leur individualité pendant leur propagation, c'est-à-dire qu'ils restent concentrés en des espaces plus ou moins restreints, ou bien chaque élément s'étend sur un espace de plus en plus grand, à mesure qu'il s'éloigne de son point d'origine.

Si l'on s'en tient aux équations de MAXWELL pour le champ électromagnétique, c'est pour la dernière alternative qu'on doit se décider ; il n'y a rien dans ces équations qui puisse maintenir une quantité d'énergie dans un volume limité. La remarque doit être faite parce que, tout en reconnaissant ce que nos théories ont d'imparfait et de passager, on peut dire que les équations de MAXWELL résument admirablement ce qu'on sait des phénomènes électromagnétiques dans l'éther, et qu'on se heurterait à des difficultés bien sérieuses si l'on voulait tenter de les modifier.

Du reste, même si l'on veut faire abstraction de ces équations et se baser uniquement sur les observations et sur des raisonnements généraux, on peut démontrer qu'une concentration des unités dans de très petits espaces est inadmissible ; elle est incom-

patible avec beaucoup de phénomènes de diffraction et d'interférence. En effet, comme il est naturel de considérer comme incohérents entre eux les différents éléments d'énergie, parce qu'ils sont émis indépendamment les uns des autres, il faut admettre que les vibrations, capables d'une interférence nette, appartiennent au même élément. Or, il y a des cas où, dans le faisceau primitif avec lequel on opère, les vibrations qui interféreront se trouvent à une distance l'une de l'autre de plus de 1 dm, soit dans la direction des rayons, soit dans une direction latérale; il faut donc que chaque élément puisse s'étendre sur un espace de plus de 1 dm<sup>3</sup> et cela étant admis, on ne voit pas pourquoi il ne s'étendrait pas bien au delà.

17. La question peut être abordée d'un autre côté. Dans un espace rempli du rayonnement noir, l'énergie n'est jamais distribuée d'une manière absolument uniforme; au contraire l'intensité du champ électromagnétique y variera irrégulièrement d'un point à l'autre, et, dans le même lieu, d'un instant à l'autre. Des inégalités de ce genre sont nécessairement produites par l'interférence des rayons incohérents entre eux, qui s'entrecroisent dans toutes les directions, et elles existeront à un degré plus prononcé encore si, dans chaque faisceau considéré séparément, il y a des accumulations locales de l'énergie, si, outre les effets d'interférence, le rayonnement a une certaine *structure*.

Remarquons à ce propos qu'une telle structure, si elle n'est pas inhérente à la nature même des rayons, ne pourra pas être produite, sauf à de très petites distances, par les irrégularités et les fluctuations du mouvement moléculaire dans la matière dont les rayons émanent. Ces irrégularités, il est vrai, se feront sentir dans les rayonnements élémentaires issus des différentes molécules; mais à une distance du corps rayonnant qui est très grande par rapport aux dimensions moléculaires, elles se seront effacées parce que le mouvement s'y compose d'une infinité de mouvements élémentaires, dans chacun desquels l'énergie est, pour ainsi dire, infiniment diluée.

Quelle que soit l'origine des inégalités du rayonnement, il y a des cas où elles peuvent produire un effet sensible. Si, par exemple, un petit corps  $M$  de nature quelconque se trouve dans l'espace occupé par le rayonnement noir, il en éprouvera une pression qui n'est pas la même de tous les côtés et, poussé tantôt dans une

direction, tantôt dans l'autre, il prendra un mouvement semblable en quelque sorte au mouvement brownien d'un petit corps suspendu dans un liquide. Or, de même que l'intensité de ce dernier mouvement correspond à la température du fluide ambiant, on peut s'attendre à une agitation du corps  $M$  correspondant à la température du rayonnement. Cette remarque qu'on doit à M. EINSTEIN<sup>1)</sup> nous fournit le moyen de nous former une idée de la grandeur des inégalités en question; elles doivent être telles que, s'il y a un grand nombre de corps identiques à  $M$ , ils reçoivent en moyenne, pour chaque degré de liberté, une énergie cinétique  $\frac{1}{2}kT$ .

M. EINSTEIN a indiqué une méthode ingénieuse pour faire le calcul nécessaire. Supposons, pour fixer les idées, que le corps  $M$  ne puisse se mouvoir que dans la direction de l'axe des  $x$ , et considérons les valeurs  $v, v'$  de sa vitesse à deux instants séparés par un intervalle  $\tau$ , qui est très grand par rapport aux périodes des vibrations et en même temps suffisamment petit pour que la différence de  $v$  et  $v'$  soit très petite. On trouve, en général, que la force exercée par le rayonnement se compose de deux parties, dont la première est proportionnelle à la vitesse  $v$  et peut être considérée comme une résistance. Nous la désignerons par  $\mathcal{A}v$ , où  $\mathcal{A}$  est un facteur indépendant des inégalités, mais déterminé par la valeur moyenne de l'énergie par unité de volume. La deuxième partie de la force, au contraire, provient précisément des inégalités.

Soient  $X$  la quantité de mouvement communiquée au corps par cette dernière partie de la force, pendant le temps  $\tau$ , et  $m$  la masse du corps. On aura

$$v' = v \left( 1 - \frac{\mathcal{A}\tau}{m} \right) + \frac{X}{m}. \quad (36)$$

Figurons-nous maintenant qu'il y ait un grand nombre de corps identiques à  $M$ , et formons, pour chacun d'eux, une équation semblable à (36). Cela fait, nous prendrons les valeurs moyennes, pour l'ensemble des corps  $M$ , des deux membres élevés au carré. Comme le système est supposé se trouver dans un état stationnaire, on a  $\overline{v'^2} = \overline{v^2}$ . Vu la petitesse de  $\mathcal{A}\tau/m$ , on peut omettre le carré de cette grandeur, et l'on peut poser  $\overline{vX} = 0$ , parce que  $v$  et  $X$  auront indifféremment le signe positif ou négatif. Ainsi l'on trouve

<sup>1)</sup> Ann. der Physik. 33, 1105, 1910.



$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{\overline{X^2}}{4c\mathcal{A}\tau}. \quad (37)$$

Si l'on fait des hypothèses spéciales sur la constitution du rayonnement et sur la nature du corps  $M$ , cette formule nous permet de calculer l'intensité de l'agitation qui lui est communiquée.

18. En appliquant cette méthode à un résonateur linéaire tel qu'il a été imaginé par M. PLANCK, et en supposant qu'il n'y ait que les inégalités produites par les interférences, MM. EINSTEIN et HOPF ont trouvé pour  $\frac{1}{2}m\overline{v^2}$  une valeur qui est notablement inférieure à  $\frac{1}{2}kT$ . On devrait donc conclure à l'existence d'une *structure* du rayonnement, celle par exemple qui est requise par l'hypothèse des éléments d'énergie persistants, si l'on pouvait être sûr de ce qui se passe dans le résonateur. Mais malheureusement, précisément quand on adopte la théorie des unités d'énergie, les phénomènes dans le résonateur échappent à notre analyse, et il est clair que les détails de ces phénomènes peuvent avoir une influence très marquée sur les forces exercées par les rayons.

C'est pour cette raison que j'ai soumis au calcul un autre cas, le plus simple qu'on puisse imaginer, et peut-être celui sur lequel, dans cette question, on peut raisonner avec le plus de confiance.

J'ai appliqué l'équation (37) à un seul électron, que j'ai considéré comme entièrement libre. Cela n'empêche pas l'emploi de la formule et il faudra seulement la multiplier par 3 pour avoir la valeur moyenne de l'énergie cinétique totale.

J'ai trouvé, en écrivant  $F$  au lieu de  $F(\lambda, T)$ ,

$$\mathcal{A} = \frac{8\pi R^2}{c} \int F d\lambda, \quad (38)$$

$$\overline{X^2} = \frac{5R^2\tau}{2c} \int \lambda^4 F^2 d\lambda, \quad (39)$$

et pour l'énergie cherchée,

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{15}{64\pi} \frac{\int \lambda^4 F^2 d\lambda}{\int F d\lambda}. \quad (40)$$

Ce résultat donne lieu aux conclusions suivantes:

a. Supposons que la distribution de l'énergie soit conforme au théorème de l'équipartition, avec exclusion des longueurs d'onde inférieures à  $\lambda_0$  (§ 9). Alors on a, d'après la formule (2), indépendamment de  $\lambda_0$ ,

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{15}{8} kT. \quad (41)$$

J'avais espéré trouver, comme au paragraphe 12,  $\frac{3}{2} kT$ . Le facteur  $\frac{5}{4}$ , par lequel le résultat se distingue de cette valeur, provient probablement d'une erreur de calcul, mais il m'a été impossible de la trouver.

b. Comme la méthode que nous suivons maintenant est tout autre que celle de la mécanique statistique, on peut essayer pour  $F$  telle fonction qu'on voudra. Pour tous les cas compatibles avec les lois de BOLTZMANN et de WIEN, on obtient, en se reportant à la formule (1) et en posant  $\lambda T = x$ ,

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{15T}{64\pi} \frac{\int_0^{\infty} \frac{[\varphi(x)]^2}{x^6} dx}{\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^5} dx}. \quad (42)$$

Le rapport des deux intégrales est une constante et l'énergie moyenne d'un électron sera donc proportionnelle à la température.

c. Ce qui doit nous intéresser surtout, c'est la valeur que prend l'énergie cinétique quand la fonction  $F$  a la forme

$$F(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{ch/k\lambda T} - 1}, \quad (43)$$

que lui assigne la théorie de PLANCK; en effet, cette fonction peut être regardée comme la représentation de la distribution réelle de l'énergie.

En posant

$$\frac{ch}{k\lambda T} = x,$$

je trouve

$$\frac{1}{2} \overline{mv^2} = \frac{15}{8} kT \frac{\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(e^x - 1)^2} dx}{\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}, \quad (44)$$

ou

$$\frac{1}{2} \overline{mv^2} = 0,315 kT, \quad (45)$$

le rapport des deux intégrales étant égal à 0,168.

Il est bien satisfaisant que la constante  $h$  ait disparu, et que l'énergie prise par l'électron dépende uniquement de  $kT$ . Mais le coefficient numérique est presque 5 fois trop petit.

Peut-on obtenir un meilleur résultat en prenant pour  $F$  une fonction qui diffère de celle de M. PLANCK et qui soit pourtant en accord avec les observations sur le rayonnement noir? En soi-même, il n'y a aucune difficulté à trouver une fonction à un seul maximum et présentant ainsi l'allure générale de la fonction du rayonnement, qui donne pour le second membre de (40) une valeur aussi élevée qu'on voudra, car, si l'on suppose le maximum de plus en plus étroit en maintenant fixe la valeur de

$$\int F d\lambda,$$

on fait accroître indéfiniment l'intégrale qui contient  $F^2$  par rapport à l'intégrale

$$\int F d\lambda.$$

Toutefois, vu la grande différence entre (45) et  $\frac{3}{2}kT$ , il est fort à craindre qu'une fonction qui donne cette dernière valeur ne s'éloigne trop de celle de PLANCK pour être en accord avec les expériences. Il semble donc que l'énergie de l'agitation imprimée aux électrons par le rayonnement noir, à cause des inégalités d'interférence seules, ne peut atteindre la valeur  $\frac{3}{2}kT$ , quoiqu'elle soit du même ordre de grandeur.