TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 20 JANUARI 2003, 10–13 UUR.

1. Beschouw het magnetische veld

$$\vec{B}(x,y,z) = axy\,\hat{x} + by^2\,\hat{y}$$

(a) Welke relatie moet er zijn tussen de constantes a en b?
(b) Bereken de stroomverdeling $\vec{j}(x,y,z)$ die dit veld veroorzaakt.
(c) Welke vectorpotentiaal $\vec{A}(x,y,z)$ hoort bij dit magnetische veld? Kies de ijk $\nabla\cdot\vec{A} = 0$.
(d) De antwoorden uit onderdelen (b) en (c) zijn gerelateerd door

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

Laat zien dat deze relatie algemeen geldig is in de magnetostatica.

2. Een neutraal molekuul heeft een ladingsverdeling $\rho(\vec{r})$. Het molekuul wordt verplaatst vanuit het oneindige naar een punt $\vec{r}_0$ in een condensator, waar een elektrisch veld $\vec{E}(\vec{r})$ heerst. De bijbehorende potentiaal $V(\vec{r})$ is nul in het oneindige.
(a) Bewijs dat het dipoolmoment $\vec{p}$ van het molekuul niet verandert door de verplaatsing.
(b) Beargumenteer dat de arbeid W die we moeten verrichten tijdens de verplaatsing gegeven is door

$$W = \int \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\vec{r}$$

Waarom speelt het elektrische veld van de dipool zélf geen rol?
(c) Leid af (uitgaande van een Taylorreeksontwikkeling van V) dat W bij benadering gegeven wordt door

$$W = -\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}_0)$$

Onder welke veronderstelling is dit een goede benadering?

3. *(a)* Leid af uit de Maxwellvergelijkingen dat het elektrische veld voldoet aan de inhomogene golfvergelijking

$$-\Delta\vec{E} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho - \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}$$

(b) Hoe luidt de inhomogene golfvergelijking voor het magnetische veld?
(c) Geef de algemene oplossing van een inhomogene golfvergelijking en leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen.
(d) Gebruik de algemene oplossing om de "vergelijking van Jefimenko" af te leiden, die luidt:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\vec{r}'\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho(\vec{r}',t_R) + \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{c|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}',t_R)\right.\\ &\qquad\left. - \frac{1}{c^2|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}(\vec{r}',t_R)\right]\end{aligned}$$

4. Veronderstel dat er in inertiaalstelsel S een magnetisch veld $\vec{B} = B_0\hat{y}$ is, maar geen elektrisch veld. Als een lading q in S met een snelheid $\vec{v} = v_0\hat{x}$ beweegt, dan ondervindt deze lading een Lorentzkracht $\vec{F} = qv_0B_0\hat{z}$.
(a) Bereken de elektrische en magnetische velden in het stelsel S' waarin q in rust is.
(b) Welke kracht $\vec{F}'$ ondervindt de lading in dit ruststelsel?
(c) In 1952 schreef Einstein: *"Wat me min of meer direct tot de speciale relativiteitstheorie heeft gebracht, was de overtuiging dat de Lorentzkracht op een bewegende lading in een magnetisch veld niets anders is dan een elektrische kracht."* Leg uit wat Einstein bedoelde.
(d) De kracht $\vec{F}' = d\vec{p}'/dt'$ kan ook uit $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ berekend worden door een Lorentztransformatie van de impuls $\vec{p}$ en tijd t. Voer deze berekening uit.