

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 23 APRIL 2003, 9-12 UUR.

1. Beschouw een systeem van N geleiders. Geleider i heeft lading Q_i en potentiaal V_i . Ladingen en potentialen zijn aan elkaar gerelateerd door

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij}V_j, \quad V_i = \sum_{j=1}^N P_{ij}Q_j.$$

De coëfficiënten C_{ij} en P_{ij} vormen twee $N \times N$ matrices.

(a) Wat is de relatie tussen de beide matrices?

(b) Bereken de totale elektrostatische energie U van het systeem als functie van de ladingen op de geleiders. Bereken vervolgens de partiële afgeleide $\partial U / \partial Q_i$ en laat zien dat het antwoord geschreven kan worden in de vorm

$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^N S_{ij}Q_j, \quad S_{ij} = \frac{P_{ij} + P_{ji}}{2}.$$

(c) Je kunt $\partial U / \partial Q_i$ ook op een andere manier berekenen, namelijk via de formule $\partial U / \partial Q_i = V_i$. Vergelijk het antwoord met dat van onderdeel b en bewijs dat de matrices P_{ij} en C_{ij} *symmetrisch* zijn.

(d) Stel dat er maar twee geleiders zijn ($N = 2$). Hun afstand R is groot ten opzichte van hun afmeting. Bereken bij benadering de waarde van de coëfficiënten P_{12} en P_{21} .

2. (a) Leid uit de Maxwellvergelijkingen af dat ladings- en stroomdichtheid voldoen aan de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{j} = 0.$$

Waarom volgt uit deze vergelijking dat lading behouden is?

(b) Er bestaat ook een continuïteitsvergelijking voor energie. Hoe luidt die? Geef aan welke termen in die vergelijking de energiedichtheid representeren.

(c) Het uitproduct $\vec{E} \times \vec{B}$ van elektrisch en magnetisch veld speelt een rol in de wet van behoud van impuls. Welke rol?

3. Stel dat een ladingsdichtheid $\rho(\vec{r}, t)$ oscilleert in de tijd $\propto \cos \omega t$. Het zou bijvoorbeeld kunnen gaan om een trillend molecuul. In complexe notatie kunnen we schrijven

$$\rho(\vec{r}, t) = \text{Re } \rho(\vec{r})e^{i\omega t}.$$

De bijbehorende potentiaal $V(\vec{r}, t)$ heeft eenzelfde tijdsafhankelijkheid,

$$V(\vec{r}, t) = \text{Re } V(\vec{r})e^{i\omega t}.$$

(a) Laat zien (uitgaande van de algemene oplossing van de inhomogene golfvergelijking in de Lorentzijk) dat potentiaal en ladingsdichtheid verbonden zijn door de integraalvergelijking

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'.$$

Wat is de relatie tussen k en ω ?

(b) Welke term in deze integraalvergelijking beschrijft de retardatie-effecten? Wanneer zijn die effecten in dit voorbeeld te verwaarlozen?

(c) Laat zien, aan de hand van de integraalvergelijking, dat de potentiaal op grote afstand R van de trillende lading afvalt $\propto 1/R$. Waarom spreekt men dan van “straling”?

4. (a) Op het college hebben we gezien dat elektrische ladingsdichtheid en stroomdichtheid een viervector $(c\rho, \vec{j})$ vormen. *Wat houdt dat in?* Is het mogelijk om de totale lading Q van een deeltje uit te breiden tot een viervector? *Zo ja, hoe? Zo nee, waarom niet?*

(b) Een kubus in rust (zijde a_0) is homogeen geladen (ladingsdichtheid ρ_0). Als dezelfde kubus een snelheid v heeft (loodrecht op één van de zijvlakken) dan neemt de ladingsdichtheid toe. *Bereken hoeveel.* Bereken ook de verandering van de *totale lading* in de kubus.

(c) Laat zien dat de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{j} = 0$$

relativistisch invariant is.