

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 19 JANUARI 2004, 14-17 UUR.

1. Een zeer dunne, oneindig lange draad ligt langs de  $z$ -as. De draad is uniform geladen (lading  $\lambda$  per lengte-eenheid).

(a) Bereken grootte en richting van het elektrische veld buiten de draad.

We willen nu de eindige lengte  $L$  van de draad in rekening brengen. Veronderstel dat de draad zich uitstrekt van  $z = -L/2$  tot  $z = +L/2$ . De volgende integraal is gegeven:

$$\int (1 + u^2)^{-3/2} du = u(1 + u^2)^{-1/2}.$$

(b) Bereken grootte en richting van het elektrische veld op een punt  $(x, 0, 0)$  langs de  $x$ -as. Ga na dat je in de limiet  $|x| \rightarrow \infty$  op het veld van een puntlading uitkomt.

(c) Gebruik de symmetrie van het probleem om het antwoord van onderdeel *b* te veralgemeniseren tot alle punten  $(x, y, 0)$  in het  $x - y$  vlak. Ga na dat je in de limiet  $L \rightarrow \infty$  het antwoord van onderdeel *a* terugvindt.

2. De magnetische energie  $U_M$  van de tijdsafhankelijke stroomverdeling  $\vec{j}(\vec{r})$  en vectorpotentiaal  $\vec{A}(\vec{r})$  is gegeven door

$$U_M = \frac{1}{2} \int \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

(a) Leid af dat  $U_M$  niet verandert ten gevolge van een willekeurige ijktransformatie.

In sommige materialen verschilt de magnetische permeabiliteit  $\mu$  van de waarde  $\mu_0$  in het vacuüm en kan bovendien plaatsafhankelijk zijn. Dan luidt de wet van Ampère

$$\text{rot} \left[ \frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu(\vec{r})} \right] = \vec{j}(\vec{r}).$$

(b) Combineer de twee bovenstaande vergelijkingen om een uitdrukking af te leiden voor  $U_M$  in termen van  $\vec{B}$  en  $\mu$ .

(c) Door een cilindervormige spoel (straal  $a$ , lengte  $L$ ,  $N$  windingen) loopt een stroom  $I$ . De spoel is gevuld met een materiaal met uniforme  $\mu$ . Bereken de magnetische energie van de spoel.

3. (a) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat elektromagnetische golven in vacuüm transversaal zijn.

(b) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat elektromagnetische golven in vacuüm zich voortplanten met snelheid  $(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ .

(c) Een vlakke elektromagnetische golf in vacuüm heeft zowel een elektrische als een magnetische energiedichtheid. Bereken de verhouding van deze twee energiedichtheden.

4. Een zeer dunne, oneindig lange draad (lading  $\lambda$  per lengte-eenheid) ligt langs de  $x$ -as in inertiaalstelsel  $S$ . De draad beweegt met snelheid  $v$  in de  $x$ -richting (dus evenwijdig aan zichzelf). In het meebewegende stelsel  $S'$  is de draad in rust.

(a) Bereken de lading  $\lambda'$  per lengte-eenheid in stelsel  $S'$ . Leg een verband tussen je resultaat en de relativistische Lorentzcontractie.

In stelsel  $S'$  is het elektrische veld (in cylindercoördinaten)

$$\vec{E}'(\vec{r}') = \hat{R}' \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 R'}.$$

(b) Maak een Lorentztransformatie van  $S'$  naar  $S$  en bereken  $\vec{E}(\vec{r})$  in stelsel  $S$ .  
Waarom hangt het resultaat niet af van  $v$ ?

(c) Bereken eveneens door een Lorentztransformatie het magnetische veld  $\vec{B}(\vec{r})$  in stelsel  $S$ . Interpreteer het resultaat in het kader van de magnetostatica.