TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 23 FEBRUARI 2004, 10–13 UUR.

1. Een zeer dunne, oneindig lange draad ligt langs de z-as. Door de draad loopt een stroom I.
   (a) Bereken grootte en richting van het magnetische veld $\vec{B}$ buiten de draad.

   We willen nu de eindige lengte L van de draad in rekening brengen. Een eventuele tijdsafhankelijkheid van de stroom mag je verwaarlozen. Veronderstel dat de draad zich uitstrekt van $z = -L/2$ tot $z = +L/2$.
   (b) Hoe luidt, volgens de wet van Biot en Savart, de integraalformule voor $\vec{B}(\vec{r})$? Geef met behulp van een tekening aan wat de gebruikte symbolen betekenen.
   (c) Bereken grootte en richting van $\vec{B}$ in het punt $(x, 0, 0)$ op de x-as. De volgende integraal is gegeven:

   $$\int (1 + u^2)^{-3/2}\, du = u(1 + u^2)^{-1/2}.$$

   Ga na dat je in de limiet $L \to \infty$ het antwoord van onderdeel a terugvindt.

2. Twee tegengestelde ladingen q en $-q$ bevinden zich, respectievelijk, op de punten $(0, 0, d/2)$ en $(0, 0, -d/2)$ langs de z-as.
   (a) Wat is de elektrostatische potentiaal Φ in een willekeurig punt $(0, 0, z)$ op de z-as?
   (b) Veronderstel nu dat $|z| \gg d$. Gebruik een Taylor-reeksontwikkeling om de potentiaal uit onderdeel a te benaderen. Met welke macht van z valt de potentiaal af?
   (c) Gebruik het antwoord uit onderdeel b om de z-component van het elektrische veld op de z-as te benaderen. Wat kun je zeggen over de x en y-componenten?

3. Beschouw een isolerend materiaal (stroom is nul) waarin de diëlektrische constante een plaatsafhankelijke functie is. In de Maxwellvergelijkingen moet je dan $\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t)$ vervangen door $\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}, t)$. Het materiaal is translatie-invariant is in de z-richting, zodat $\varepsilon(x, y)$ alleen in het $x - y$ vlak varieërt. We onderzoeken de voortplanting door dit materiaal van een elektromagnetische golf die in de z-richting gepolariseerd is. Dat wil zeggen, het elektrische veld $\vec{E}$ wijst in de z-richting.
   (a) Leid af, dat het magnetische veld $\vec{B}$ van deze elektromagnetische golf loodrecht staat op het elektrische veld.

   Veronderstel dat de elektromagnetische golf monochromatisch is (frequentie ω). We gebruiken de complexe notatie

   $$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\,\{\vec{\mathcal{E}}(x, y)e^{i\omega t}\}, \;\; \vec{B}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\,\{\vec{\mathcal{B}}(x, y)e^{i\omega t}\}.$$

   (b) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat $\vec{\mathcal{E}}(x, y)$ voldoet aan een differentiaalvergelijking van de vorm

   $$\Delta\vec{\mathcal{E}}(x, y) + f(x, y)\vec{\mathcal{E}}(x, y) = 0.$$

   (Deze vergelijking heet de Helmholtzvergelijking.) Hoe hangt $f(x, y)$ af van $\varepsilon(x, y)$? Ook de Poyntingvector $\vec{S} = (1/\mu_0)\vec{E} \times \vec{B}$ schrijven we in complexe notatie:

   $$\vec{S}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\,\{\vec{\mathcal{S}}(x, y)e^{i\omega t}\}.$$

   (c) Leid af dat $\vec{\mathcal{S}} = (i/2\mu_0\omega)\nabla|\vec{\mathcal{E}}|^2$.

4. De ladingsdichtheid maal de lichtsnelheid $c\rho$ en de stroomdichtheid $\vec{j}$ vormen samen een viervector.
(a) Wat houdt deze bewering in?
(b) Bediscussiëer de relatie van deze viervector tot de viervector $(\gamma c, \vec{\eta})$ van de eigensnelheid.
(c) Toon aan dat de wet van behoud van lading

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}$$

relativistisch invariant is.