TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 17 JANUARI 2005, 14–17 UUR.

1. Een coaxiaalkabel bestaat uit twee concentrische geleidende cylinders. De binnencylinder heeft straal a, de buitencylinder heeft straal b en $L \gg a, b$ is de lengte van de kabel. Beide cylinders zijn uniform geladen. De totale lading op de binnencylinder is Q en op de buitencylinder $-Q$.
   (a) Bereken grootte en richting van het elektrische veld tussen de beide cylinders, alsook buiten de buitenste cylinder.
   (b) Bereken het potentiaalverschil V tussen de cylinders en geef aan welke van de twee cylinders de hoogste potentiaal heeft.

   Door elk van beide cylinders loopt een stroom, van gelijke grootte maar tegengesteld van richting (I door de binnencylinder, $-I$ door de buitencylinder).
   (c) Bereken het magnetische veld tussen de beide cylinders, alsook buiten de buitenste cylinder. Geef de richting in een tekening aan.
   (d) Welke vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$ correspondeert met dit magnetische veld?

2. Een vlakke elektromagnetische golf (frequentie ω) plant zich voort in de positieve z-richting door een metaal met specifiek geleidingsvermogen σ. (U mag gebruikmaken van de wet van Ohm $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.) We veronderstellen dat het metaal de hele ruimte vult.
   (a) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat de elektrische en magnetische velden in het x-y vlak liggen en loodrecht op elkaar staan.

   We zoeken een oplossing van de vorm

   $$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{x}\,\mathrm{Re}\,\{E(z)e^{i\omega t}\},$$
   $$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{y}\,\mathrm{Re}\,\{B(z)e^{i\omega t}\}.$$

   (b) Leid af de differentiaalvergelijking

   $$\frac{d^2}{dz^2}E(z) = \gamma^2\omega^2 E(z).$$

   Door welke uitdrukking wordt de complexe constante γ gegeven?
   (c) Los de differentiaalvergelijking op en bepaal $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Schrijf de oplossing uit door $\gamma = \alpha + i\beta$ op te splitsen in een reëel en imaginair deel. (U hoeft α en β niet expliciet te bepalen en mag veronderstellen dat $\alpha > 0$.)
   (d) Druk de fasesnelheid van de golf uit in termen van ω, α, β; doe hetzelfde voor de indringdiepte.

3. Op het college hebben we afgeleid dat de elektromagnetische potentialen V en $\vec{A}$ in de aanwezigheid van stromen en ladingen voldoen aan de inhomogene golfvergelijking, mits we de *Lorentzijk* kiezen. We kiezen nu een andere ijk, de zogenaamde *Coulombijk*, gedefiniëerd door

   $$\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0.$$

   (a) Beargumenteer waarom de Coulombijk zowel V als $\vec{A}$ uniek vastlegt. U mag veronderstellen dat de potentialen naar nul gaan in het oneindige.
   (b) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, aan welke twee gekoppelde

vergelijkingen V en $\vec{A}$ voldoen.
(c) Toon aan dat $V = 0$ in vacüum. Volgt hieruit dat $\vec{E} = 0$ in vacüum? Zo ja, waarom, zo neen, waarom niet.

4. In inertiaalstelsel S wordt een elektromagnetische golf in vacüum beschreven door

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \hat{z}E_0\cos(kx-\omega t),\\ \vec{B}(\vec{r},t) &= -\hat{y}(E_0/c)\cos(kx-\omega t).\end{aligned}$$

De golf beweegt met snelheid $c = \omega/k$ in de x-richting. Een ander inertiaalstelsel S' beweegt ten opzichte van S met een snelheid v in de x-richting.
(a) Gebruik de Lorentztransformatie van de elektrische en magnetische velden om $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ in stelsel S' te berekenen.
(b) Gebruik de Lorentztransformatie van ruimte en tijd om $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ te schrijven als functie van x' en t' (in plaats van als functie van x en t). Ga na dat de voortplantingsnelheid van de golf in stelsel S' nog steeds gelijk is aan c.
(c) Interpreteer het verschil in frequentie van de golf in de twee inertiaalstelsels in termen van een "Dopplereffect voor licht".[2]

[2]Ter informatie, het Dopplereffect voor geluid is het verschijnsel dat de sirene van een ambulance die langsrijdt eerst stijgt in toonhoogte en vervolgens, na het passeren, in toonhoogte daalt.