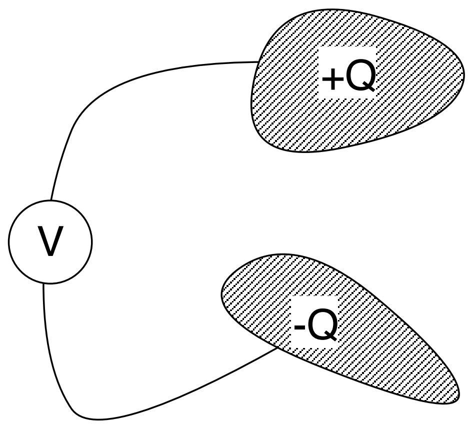
TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 16 JANUARI 2006, 14–17 UUR.

1. Een condensator bestaat uit twee tegengesteld geladen geleidende platen (lading $\pm Q$) die door een batterij op een potentiaalverschil V worden gehouden (zie figuur).



(a) Schets de elektrische veldlijnen tussen de geleiders. Geef de richting van het elektrische veld $\vec{E}$ aan met pijlen. Welke hoek maken de veldlijnen met de geleiders en waarom?
(b) De capaciteit van de condensator is gegeven door $C = Q/V$. Leid af, m.b.v. de wet van Gauss, dat

$$C = \epsilon_0 \left| \frac{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l}} \right| .$$

De oppervlakte-integraal in de teller strekt zich uit over het oppervlak S van één van beide geleiders en de lijnintegraal in de noemer loopt langs een pad $\mathcal{L}$ van het oppervlak van de ene geleider naar het oppervlak van de andere geleider.
(c) Leid af dat de elektrostatische energie U van de condensator is gegeven door $U = \frac{1}{2}QV$. Leg uit, waarom hieruit volgt dat

$$\int_{\mathcal{V}} |\vec{E}|^2 dV = \left| \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right| \left| \int_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right| .$$

(De volume-integraal strekt zich uit over de ruimte $\mathcal{V}$ tussen de condensatorplaten.)
(d) Veronderstel dat de ruimte tussen de condensatorplaten zelf een zwakke geleider is, met stroomdichtheid $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Het specifieke geleidingsvermogen σ is zo klein dat de elektrische veldlijnen niet verstoord worden. Bereken de totale stroom I tussen de condensatorplaten en laat zien dat de weerstand $R = V/I$ gerelateerd is aan de capaciteit C door

$$RC = \epsilon_0/\sigma.$$

(U mag nog steeds veronderstellen dat de diëlektrische constante gelijk is aan ϵ_0.)

2. In een oneindig grote vlakke plaat in het $x - y$ vlak loopt een tijdsafhankelijke uniforme stroom in de y-richting. De oppervlaktestroomdichtheid is $\vec{j} = f(t)\hat{y}$. Gegeven is dat $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$, d.w.z. in het verre verleden was de stroom nul.

(a) Ook de ladingsdichtheid was nul in het verre verleden:
$\lim_{t\to-\infty} \rho(t) = 0$. Bewijs nu dat $\rho(t) = 0$ voor alle t, d.w.z. de plaat blijft ongeladen.
(b) Schrijf de vectorpotentiaal $\vec{A}$ op het punt $\vec{r} = (0, 0, z)$ buiten de plaat als een integraal over de geretardeerde stroom in de plaat. Hoe hangt $\vec{A}$ af van x en y?
(c) Gebruik cylindercoördinaten om te bewijzen dat

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \hat{y}\frac{\mu_0 c}{2}\int_0^\infty du\, f(t - u - |z|/c).$$

(d) Bereken de bijbehorende elektrische en magnetische velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ buiten de plaat. Geef in een figuur de richtingen aan boven en onder de plaat.
(e) De berekende elektrische en magnetische velden vormen een vlakke golf, die zich vanuit de plaat in de positieve en negatieve z-richting voortplant. Toon aan dat deze golf zich met de lichtsnelheid c voortplant. ***Opmerking:*** *als onderdeel (d) niet gelukt is, dan mag u dit ook in het algemeen aantonen, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen.*

3. *(a)* Leid af, uitgaande van de Lorentztransformatieregels voor t en $\vec{r}$, de transformatieregels voor $\partial/\partial t$ en $\partial/\partial\vec{r}$.
(b) Bewijs dat het inproduct van twee viervectoren niet verandert bij verandering van inertiaalstelsel.
(c) De homogene golfvergelijking luidt

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(\vec{r}, t) - \frac{\partial^2}{\partial\vec{r}^2}f(\vec{r}, t) = 0.$$

Bewijs dat deze golfvergelijking dezelfde vorm heeft in elk inertiaalstelsel, mits $v = c$.