Tentamen Elektromagnetisme II, 22 januari 2007, 14–17 uur.

1. De continuïteitsvergelijking luidt

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\nabla \cdot \vec{\jmath}.$$

(a) Leid deze vergelijking af uit de Maxwellvergelijkingen.
(b) Laat zien, met behulp van de stelling van Gauss, dat uit deze vergelijking volgt dat lading behouden is.
(c) Gegeven is voor $t > 0$ de stroomdichtheid $\vec{\jmath}(\vec{r}, t) = j_0 \vec{r} e^{-atr^2}$, in bolcoördinaten, met constanten j_0 en $a > 0$. Bereken $\rho(\vec{r}, t)$.

2. Een bewegende stroomkring (met snelheid $\vec{v}$ die klein is t.o.v. de lichtsnelheid) heeft omtrek $C(t)$ en omsluit een oppervlak $S(t)$. De tijdsafhankelijke elektrische en magnetische velden voldoen aan de integraalvergelijking

$$-\frac{d}{dt}\int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{C(t)} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \equiv \mathcal{E}(t).$$

[De grootheid $\mathcal{E}$ heet de elektromotorische kracht.]
(a) Leid deze integraalvergelijking af met behulp van de Maxwellvergelijkingen.

De magnetische flux $\Phi(t)$ door de stroomkring is gegeven door $\Phi(t) = L(t)I(t)$, met $L(t)$ de coëfficient van zelfinductie en $I(t)$ de stroom door de kring. Tevens geldt dat $\mathcal{E}(t) = R(t)I(t)$ met $R(t)$ the weerstand van de kring.
(b) Leid af de differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dt}L(t)I(t) = -R(t)I(t).$$

Bepaal de oplossing als de tijdsafhankelijkheid van L en R verwaarloosd mag worden. [Gegeven is dat $I(0) = I_0$.]

Als er een batterij [met spanning $V(t)$] wordt aangesloten op de stroomkring, dan verandert de differentiaalvergelijking in

$$L\frac{d}{dt}I(t) = V(t) - RI(t).$$

(We verwaarlozen weer de tijdsafhankelijkheid van L en R.)
(c) Veronderstel een wisselspanning $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Beargumenteer wat de hoogste frequentie is waarmee je de stroomkring aan kan drijven.

3. Een elektromagnetisch veld is gegeven door de potentialen

$$\Phi(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \cos(kz - \omega t),$$

voor een constante vector $\vec{A}_0 = (A_{0x}, A_{0y}, A_{0z})$.
(a) Bereken de bijbehorende elektrische en magnetische velden.
(b) Bereken de bijbehorende ladings- en stroomdichtheden.
(c) Leid af dat, indien lading en stroom overal nul zijn, er moet gelden $A_{0z} = 0$ en $\omega = ck$.

4. De Lorentztransformatie luidt

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad y' = y, \quad z' = z,$$

met $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en $\beta = v/c$.
(a) Leid af dat de lichtsnelheid invariant is onder Lorentztransformatie.
(b) Leid af dat de Lorentztransformatie ook geschreven kan worden als

$$x' + ct' = e^{-\theta}(x + ct), \quad x' - ct' = e^{\theta}(x - ct), \quad y' = y, \quad z' = z,$$

met $\tanh \theta = \beta$.
(c) Voer twee opeenvolgende Lorentztransformaties uit, eerst met snelheid v_1 en vervolgens met snelheid v_2 (steeds in de x-richting). Laat zien dat dit *niet* hetzelfde is als een enkele Lorentztransformatie met snelheid $v_{\text{totaal}} = v_1 + v_2$. Wat is in plaats daarvan de juiste relatie tussen v_{totaal} en v_1, v_2?
U mag gebruik maken van de formule $\tanh(x+y) = (\tanh x + \tanh y)/(1 + \tanh x \tanh y)$.