Tentamen Elektromagnetisme II, 21 januari 2008, 14–17 uur.

1. Voordat Maxwell zijn differentiaalvergelijkingen opschreef, kende men al de wet van Gauss,

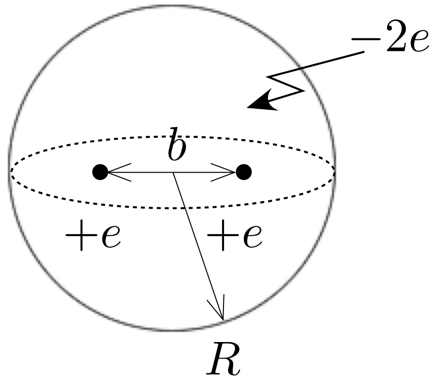
$$\oint_{S_V} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r})\, dV,$$

die de oppervlakte-integraal van het elektrische veld relateert aan de totale omvatte lading. Beschouw nu een elektrisch geladen kubusvormig volume (ribbe a, volume $V = a^3$, totale lading Q), met het centrum in het punt $\vec{r}_0$. De kubus bevindt zich in een elektrisch veld $\vec{E}(\vec{r})$ dat langzaam variëert over de afmeting van de kubus.
(a) Leid af, door middel van een Taylorreeksontwikkeling, dat bij benadering geldt

$$\oint_{S_V} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \approx V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}_0).$$

Wat is de orde van grootte van de verwaarloosde termen?
(b) Leid af, met behulp van beide bovenstaande vergelijkingen, de eerste Maxwell-vergelijking $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$.
(c) Bereken, met behulp van de wet van Gauss, het elektrische veld binnen en buiten een uniform geladen bol (straal R, totale lading Q).

(d) Een eenvoudig model voor het waterstofatoom plaatst twee puntladingen $+e$ in de bol van opgave *(c)*. Door $Q = -2e$ te kiezen is het atoom neutraal. Stel dat het middelpunt van de bol in de oorsprong ligt, en dat de puntladingen symmetrisch op posities $(b/2, 0, 0)$ en $(-b/2, 0, 0)$ geplaatst zijn. Bereken de afstand b van de puntladingen waarbij de totale kracht op elke puntlading gelijk is aan nul.

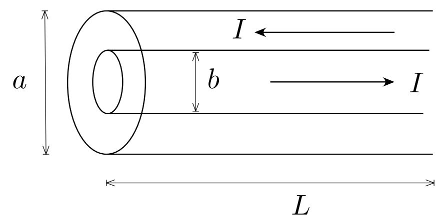


2. De elektrische potentiaal $\Phi(\vec{r}, t)$ en vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r}, t)$ worden niet uniek vastgelegd door de elektrische en magnetische velden $\vec{E}(\vec{r}, t)$ en $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Een transformatie van Φ en $\vec{A}$ die $\vec{E}$ en $\vec{B}$ onveranderd laat heet ijktransformatie.
(a) Leid af, wat de meest algemene vorm is van een ijktransformatie.
(b) Het is handig gebleken, om Φ en $\vec{A}$ zo te kiezen dat ze voldoen aan de Lorentzijk, $c^2 \operatorname{div} \vec{A} + \partial\Phi/\partial t = 0$. Leid af, aan welke differentiaalvergelijking de ijktransformatie moet voldoen om dit te bewerkstelligen.

   (c) In de Lorentzijk ontkoppelen de Maxwellvergelijkingen, zodanig dat je twee gescheiden differentiaalvergelijkingen krijgt voor Φ en $\vec{A}$. Toon dit aan.
(d) Stel, dat Φ en $\vec{A}$ in een bepaald inertiaalstelsel aan de Lorentzijk voldoen. Toon aan, dat ze dan in elk ander inertiaalstelsel ook aan de Lorentzijk voldoen.

3. Een coaxiaalkabel bestaat uit twee concentrische perfekt geleidende cylinders (diameters a en b, lengte L) waartussen een potentiaalverschil V is aangebracht. (De binnenste cylinder heeft de hoogste potentiaal.) Een stroom I door de binnenste cylinder stroomt terug via de buitenste cylinder.

(a) Bereken de lading op beide cylinders.
(b) Bereken de grootte en richting van de Poynting-vector in de ruimte tussen de cylinders.
(c) Bereken de energie die in een tijd Δt van het ene uiteinde van de coaxiaalkabel naar het andere uiteinde wordt vervoerd.



4. Beschouw twee inertiaalstelsels S en S'. Het stelsel S' beweegt ten opzichte van S met een snelheid v_R in de x-richting.
(a) Bereken, uitgaande van de Lorentztransformatie, hoe de drie componenten v_x, v_y, v_z van de snelheid transformeren bij overgang van S naar S'.
(b) Is het mogelijk om de snelheid uit te breiden tot een viervector? Zo ja, wat is dan de vierde component; Zo nee, waarom niet.
(c) Een deeltje beweegt in stelsel S met de lichtsnelheid c in de y-richting. Leid af dat de grootte van de snelheid in stelsel S' nog steeds gelijk is aan c.
Let op: de snelheid van het deeltje staat loodrecht op v_R.