

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 17 MAART 2008, 14-17 UUR.

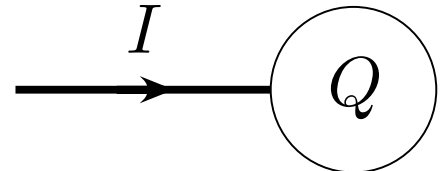
1. De zogenaamde *verplaatsingstroomdichtheid* \vec{j}_v is gedefiniëerd door

$$\vec{j}_v(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t).$$

We definiëren de som $\vec{J} = \vec{j} + \vec{j}_v$ van \vec{j}_v en de elektrische stroomdichtheid \vec{j} .

(a) Leid uit de Maxwellvergelijkingen af, dat $\text{div } \vec{J} = 0$. Hieruit volgt dat $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ voor elk gesloten oppervlak S .

Een metalen bol wordt door een dunne draad opgeladen. De stroom door de draad is $I(t)$, dus de lading $Q(t)$ op de bol voldoet aan $I = dQ/dt$. Veronderstel dat de lading op elk tijdstip uniform over de bol verdeeld is.



(b) Bereken het elektrische veld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ buiten de bol.

(c) Bereken \vec{j}_v buiten de bol en ga na dat $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ als S het oppervlak van de bol is.

2. We onderzoeken de één-dimensionale golfvergelijking

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) = 0.$$

De algemene oplossing is $f(x, t) = f_+(x + vt) + f_-(x - vt)$.

(a) Laat zien, dat een functie f van deze vorm inderdaad voldoet aan de golfvergelijking. Wat is de betekenis van de coëfficiënt v ? Wat kun je zeggen over de functie f_+ in het speciale geval dat de golf in de positieve x -richting beweegt?

(b) Gegeven zijn de beginvoorwaarden

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = F(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = G(x).$$

Bereken f_+ en f_- in termen van F en G .

(c) We definiëren de energiedichtheid U en de energiestroomdichtheid S door

$$U = \frac{1}{2v^2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2, \quad S = - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Leid af, uitgaande van de golfvergelijking, dat deze definities voldoen aan de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Waarom kunnen we laatstgenoemde vergelijking interpreteren als de wet van behoud van energie?

3. Het elektrische veld van een elektromagnetische golf in vacuüm is gegeven door

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \hat{x} E_1 e^{i(kz - \omega t)} + \hat{y} E_2 e^{i(kz - \omega t)} \right\}.$$

De coëfficiënten E_1 en E_2 zijn complexe getallen.

(a) Bereken (m.b.v. de Maxwellvergelijkingen) het bijbehorende magnetische veld \vec{B} . Schets in een assenstelsel de vectoren \vec{E} , \vec{B} en de voortplantingsrichting van de golf.

(b) Bereken (weer m.b.v. de Maxwellvergelijkingen) de voortplantingssnelheid $v = \omega/k$ van de golf.

(c) Bereken de energiestroomdichtheid, gemiddeld over 1 periode.

4. In de relativiteitstheorie geldt de tweede wet van Newton in de vorm

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

maar *niet* in de vorm

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

(a) Leg uit wat het verschil is tussen deze twee vergelijkingen. Waarom verdwijnt dit verschil bij niet-relativistische snelheden?

(b) Stel een deeltje is in rust in inertiaalstelsel S . We beschouwen nu een tweede inertiaalstelsel S' , wat ten opzichte van S met snelheid v_R in de x -richting beweegt. Bereken de kracht \vec{F}' op het deeltje in stelsel S' , gegeven de kracht \vec{F} in stelsel S .

(c) Toon aan dat de vector $\vec{K} = (1 - |\vec{v}|^2/c^2)^{-1/2} \vec{F}$ uit te breiden is tot een viervector.