**TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 19 JANUARI 2009, 14–17 UUR.**

1. Een bol met straal $a$ heeft de volgende ladingsverdeling:

$$\rho_0(\vec{r}) = \begin{cases} C_0 r & \text{voor } r \le a, \\ 0 & \text{voor } r > a. \end{cases}$$

*(a)* Bereken het elektrische veld $\vec{E}_0(\vec{r})$ en de potentiaal $\Phi_0(\vec{r})$ (binnen en buiten de bol). Merk op dat beiden continu zijn op $r = a$.
*(b)* Ik breng nu extra lading $\delta Q$ aan op het oppervlak van de bol, uniform uitgesmeerd over het hele oppervlak. Bereken de nieuwe $\vec{E} = \vec{E}_0 + \delta\vec{E}$ en $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$. Hoe zit het nu met de continuïteit op $r = a$?
*(c)* Stel nu dat de oppervlaktelading *niet* uniform is uitgesmeerd. Leid af een relatie tussen de oppervlakteladingsdichtheid $\sigma$ en de discontinuïteit van het elektrische veld op $r = a$.
*(d)* Gegeven is dat $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ en $C_0 = 0$. Bereken de totale lading en het dipoolmoment (grootte en richting) van de bol.

2. Een statische stroomverdeling $\vec{j}(\vec{r})$ produceert een vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$, volgens de driedimensionale integraal

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

*(a)* Stel dat ik alleen de $x$-component $A_x$ van $\vec{A}$ wil weten. Welke integraal moet ik dan uitvoeren?
*(b)* Leid af, dat $\vec{A}$ voldoet aan de ijk $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.
*(c)* Als de stroomdichtheid $\vec{j}$ alleen ongelijk aan nul is in een dunne draad, dan kun je de driedimensionale volume-integraal vereenvoudigen tot een ééndimensionale lijn-integraal. Laat zien hoe. Verduidelijk uw antwoord door in een figuur aan te geven wat de gebruikte symbolen betekenen.
*(d)* Veronderstel nu, dat $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ook van de tijd afhangt. Wat wordt dan de integraalformule voor $\vec{A}(\vec{r}, t)$? (Geef weer aan wat de gebruikte symbolen betekenen.) Welke ijk heeft u verondersteld?

3. Een monochromatische, lineair gepolariseerde, vlakke elektromagnetische golf in vacuüm heeft elektrisch veld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{x}\, E_0 \cos[\omega(z/c - t) + \alpha].$$

De symbolen $E_0$, $\omega$, $c$, $\alpha$ zijn constanten, $t$ geeft de tijd weer en $\vec{r} = (x, y, z)$ de plaats.
*(a)* Bereken, met behulp van de Maxwellvergelijkingen, het bijbehorende magnetische veld. Geef in een tekening de richting van $\vec{E}$ en $\vec{B}$ weer, alsook de voortplantingsrichting van de golf.
*(b)* Bereken grootte en richting van de energiestroomdichtheid $\vec{J}$, gemiddeld over één periode van de golf. Wat is de eenheid van $\vec{J}$?
*(c)* Bereken de energiedichtheid $U$ van het elektromagnetische veld (eveneens gemiddeld over één periode). Wat is de eenheid van $U$?
*(d)* Leg uit, waarom de relatie $|\vec{J}| = Uc$ energiebehoud uitdrukt.

4. Een puntlading $q$ beweegt met snelheid $v$ langs de $x$-as. Op tijdstip $t = 0$ is de puntlading in de oorsprong, z'n coördinaten zijn dus $\vec{r}_q = (vt, 0, 0)$.
*(a)* Maak een Lorentztransformatie naar een stelsel waarin de puntlading in rust is, en bereken het elektrische veld $\vec{E}'$ en het magnetische veld $\vec{B}'$ in dat stelsel.
*(b)* Transformeer nu terug naar het oorspronkelijke stelsel. Wat vindt u voor $\vec{E}(\vec{r}, t)$?
*(c)* Maak een schets van het elektrische vectorveld rond de puntlading. In welke richting is het veld 't grootst?
*(d)* Een waarnemer zit in het punt $P = (0, 0, d)$ (dus op de $z$-as, op een afstand $d$ van de oorsprong). Teken in een grafiek hoe de verschillende componenten van $\vec{E}$ in het punt $P$ als functie van de tijd variëren als de puntlading de oorsprong passeert.