TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 16 MAART 2009, 14–17 UUR.

1. We beschouwen een systeem van N geleiders met ladingen $Q_1, Q_2, \ldots Q_N$. Het systeem is als geheel neutraal, dus $\sum_{i=1}^{N} Q_i = 0$. De elektrostatische potentialen $V_1, V_2, \ldots V_N$ van deze geleiders zijn gerelateerd aan de ladingen door een stelsel van lineaire vergelijkingen,

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} V_j, \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

De coëfficienten c_{ij} hangen af van de vorm en onderlinge afstand van de geleiders. Omdat het systeem als geheel neutraal is, geldt $\sum_{i=1}^{N} c_{ij} = 0$.
(a) Beargumenteer, waarom ook geldt dat $\sum_{j=1}^{N} c_{ij} = 0$.
(b) Geef een uitdrukking voor de elektrostatische energie U_e van het systeem, in termen van de potentialen V_i en coëfficienten c_{ij}.
(c) Neem als voorbeeld voor $N = 2$ een condensator met capaciteit C. Druk de vier coëfficienten $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ uit in termen van C.

2. We onderzoeken een golfpijp bestaande uit een holle cylinder van straal a langs de z-as, met ideaal geleidende wanden. Binnen in de golfpijp is vacuum. Een monochromatische TM mode (frequentie ω) heeft een elektrisch veld dat (in cylindercoördinaten) voor $R < a$ gegeven is door

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{z}\,\mathrm{Re}\,\{E(R) e^{ikz - i\omega t}\}.$$

(a) Leid af, dat het bijbehorende magnetische veld transversaal is.
(b) Geef de differentiaalvergelijking en randvoorwaarde waar $E(R)$ aan voldoet.[3]
(c) De oplossing van de differentiaalvergelijking is gegeven door een Besselfunctie,

$$E(R) = \text{constante} \times J_0\left(R\sqrt{(\omega/c)^2 - k^2}\right).$$

Bereken nu de relatie tussen k en ω (de zogenaamde dispersierelatie), voor frequenties waarbij er slechts één propagerende mode in de golfpijp bestaat.[4] Bereken ook de cutoff frequentie (waaronder geen enkele propagerende mode bestaat).

3. In het college hebben we in de elektrodynamica gebruik gemaakt van de Lorentz-ijk. In deze opgave onderzoeken we een andere ijk, de zogenaamde Coulomb-ijk. De Coulomb-ijk luidt

$$\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}, t) = 0.$$

(a) Laat zien dat in de Coulomb-ijk de scalaire potentiaal Φ voldoet aan de Poisson-vergelijking

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}, t).$$

[3] De Laplaciaan in cylindercoördinaten is

$$\Delta E_z = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial E_z}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}.$$

[4] Het eerste nulpunt van de Besselfunctie $J_0(x)$ ligt bij $x = 2.405$.

(b) Wat is de algemene oplossing van deze vergelijking?
(c) De potentiaal Φ reageert instantaan op veranderingen in de ladingsdichtheid ρ. Beargumenteer waarom hier geen sprake is van een schending van het principe van de relativiteitstheorie “dat geen signaal zich sneller kan voortplanten dan met de lichtsnelheid”.

4. *(a)* In inertiaalstelsel S geldt $\vec{B} = 0$, $\vec{E} \neq 0$. Geef de elektrische en magnetische velden $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ in stelsel S', dat ten opzichte van S met snelheid v in de x-richting beweegt. Ga na dat $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ loodrecht op elkaar staan.
(b) Leid af dat $\vec{E} \cdot \vec{B}$ invariant is onder Lorentztransformaties.
(c) Stel dat een waarnemer W het elektrische en magnetische veld loodrecht op elkaar ziet staan in een bepaald punt. Beargumenteer, waarom een waarnemer W', die ten opzichte van W een constante snelheid heeft in een willekeurige richting, het elektrische en magnetische veld ook loodrecht op elkaar ziet staan in datzelfde punt. (U mag veronderstellen dat voor beide waarnemers zowel het elektrische als het magnetische veld ongelijk is aan nul.)