Tentamen Elektromagnetisme II, 16 december 2009, 14–17 uur.

1. Een tijdsonafhankelijk elektrisch veld is gegeven door

$$\vec{E}(x,y,z) = ax\hat{x} + bz\hat{y} + [f(x,y) + cz^2]\hat{z},$$

waarbij a, b, c constanten zijn. Gegeven is bovendien dat $\vec{E} = 0$ in de oorsprong $\vec{r} = 0$.
(a) Bereken de functie $f(x,y)$, gebruik makend van de Maxwellvergelijkingen. Bereken vervolgens de elektrostatische potentiaal Φ.
(b) Bereken, uitgaande van dit elektrische veld, de ladingsdichtheid ρ en vervolgens de totale lading Q die bevat is in de kubus $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$, $0 \le z \le L$.
(c) Stel dat ik de elektrische energie wil weten die in deze kubus zit opgeslagen. Ik zou die kunnen uitrekenen via de formule $U_1 = \frac{1}{2}\int_{\text{kubus}} \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})\, dV$ of via de formule $U_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{kubus}} |\vec{E}(\vec{r})|^2\, dV$. Komt hier hetzelfde uit? Beargumenteer uw antwoord. Indien $U_1 \neq U_2$, welke van beide formules zou ik dan moeten gebruiken?

2. *(a)* Een lange cylindrische spoel (straal a) omvat een magnetische flux Φ. Bereken de vectorpotentiaal $\vec{A}$ buiten de spoel. Ga na dat het bijbehorende magnetische veld gelijk is aan nul.
(b) Bewijs dat het onmogelijk is om een ijktransformatie uit te voeren zodanig dat $\vec{A} = 0$ buiten de spoel.
(c) Meer in het algemeen wordt de vectorpotentiaal $\vec{A}$ ten gevolge van een tijdsonafhankelijke stroomdichtheid $\vec{j}$ gegeven door de integraalformule

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\vec{r}\,' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

Ga na dat deze vectorpotentiaal voldoet aan de ijk $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

3. In deze opgave onderzoeken we de voortplanting van elektromagnetische golven in de lege ruimte tussen twee perfect geleidende vlakke platen. De onderste plaat is op $z = 0$, de bovenste plaat is op $z = d$. We beschouwen allereerst een TE golf met elektrisch veld van de vorm

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{y}\,\mathrm{Re}\left\{E(z)e^{i(kx-\omega t)}\right\}.$$

(a) Geef de golfvergelijking en de randvoorwaarden waar de functie $E(z)$ aan moet voldoen. Waarom kan deze functie niet ook van y afhangen?
(b) Leid een relatie af tussen golfgetal k en frequentie ω van deze golf.
(c) Een ander soort golf heeft tussen de platen een z-onafhankelijk elektrisch veld van de vorm $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\cos(kx - \omega t)$. In welke richting moet de constante vector $\vec{E}_0$ nu wijzen? Wat is nu de relatie tussen k en ω?

4. *(a)* De lading q is invariant onder Lorentztransformaties. Gebruik dit gegeven om af te leiden hoe de ladingsdichtheid ρ van een met snelheid v bewegend voorwerp verschilt ten opzichte van de ladingsdichtheid ρ_0 in het ruststelsel. Hoe valt ρ uit te breiden tot een viervector?
(b) Toon aan, dat de wet van behoud van lading,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{j}(\vec{r},t),$$

relativistisch invariant is (d.w.z. dat deze wet dezelfde vorm heeft in elk inertiaalstelsel).

(c) De relativistische impuls van een deeltje met snelheid $\vec{v}$ en massa m is $\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Het foton heeft geen massa ($m = 0$) en beweegt met de lichtsnelheid ($v = c$), dus deze formule geeft $0/0$ en kan niet zonder meer gebruikt worden. Hoe kan de impuls van het foton toch berekend worden, gegeven dat het foton een energie E heeft? Welk experiment zou kunnen aantonen dat licht impuls bezit?