Tentamen Elektromagnetisme II, 28 april 1995, 9–12 uur.

1. Het cylindersymmetrische tijdsafhankelijke magnetische veld $\vec{B}$ wordt gegeven door

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \begin{cases} B_0\hat{z}\cos\omega t & \text{als } x^2+y^2<a^2, \\ 0 & \text{als } x^2+y^2>a^2. \end{cases}$$

(a) Bereken het bijbehorende elektrische veld $\vec{E}$.
(b) Bereken de bijbehorende stroom- en ladingsdichtheden.
(c) Bereken de arbeid die het elektromagnetische veld verricht gedurende een periode $T = 2\pi/\omega$.

2. Een elektromagnetisch veld *in vacuum* wordt beschreven door de potentialen $V = 0$, $\vec{A} = A_0\hat{y}\sin(kx-\omega t)$.
(a) Bereken de bijbehorende velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$.
(b) Bereken de relatie tussen het golfgetal k en de frequentie ω.
(c) Is het mogelijk om een ijktransformatie te vinden zodanig dat de vectorpotentiaal overal gelijk wordt aan nul? Zo neen, waarom niet; Zo ja, wat is dan die transformatie.

3. In een metaal (geleidingsvermogen σ) geldt de wet van Ohm: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.
(a) Leid af dat de ladingsverdeling $\rho(\vec{r},t)$ in het metaal voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho.$$

(De dielektrische constante en magnetische permeabiliteit in het metaal stellen we gelijk aan die van vacuum, nl. ε_0 en μ_0.) Laat zien dat $\rho \to 0$ voor $t \to \infty$.
(b) We veronderstellen nu $\rho = 0$ in het metaal. Leid af dat het elektrische veld $\vec{E}(\vec{r},t)$ voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\vec{r}^2} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

(c) We zoeken een oplossing in de vorm van een vlakke golf,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{y}\,\mathrm{Re}\left[E_0 e^{i(kx-\omega t)}\right].$$

Bereken de dispersierelatie, d.w.z. de relatie tussen golfgetal k en frequentie ω. Geef aan hoe de indringdiepte van het elektrische veld in het metaal afhangt van σ in het geval dat $\sigma \ll \varepsilon_0\omega$.

4. *(a)* Hoe transformeren de potentialen $V(\vec{r},t)$ en $\vec{A}(\vec{r},t)$ bij verandering van inertiaalstelsel S naar S'?
(b) Gegeven is dat de potentialen in S voldoen aan de Lorentzijk,

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Waarom voldoen de potentialen in S' dan ook aan de Lorentzijk?
(c) In de Lorentzijk gelden de golfvergelijkingen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \vec{r}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \vec{r}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho,
\end{aligned}
$$

waarbij $\vec{j}(\vec{r}, t)$ en $\rho(\vec{r}, t)$ de stroom- en ladingsdichtheden zijn. Waarom zijn deze golfvergelijkingen invariant onder Lorentztransformaties?