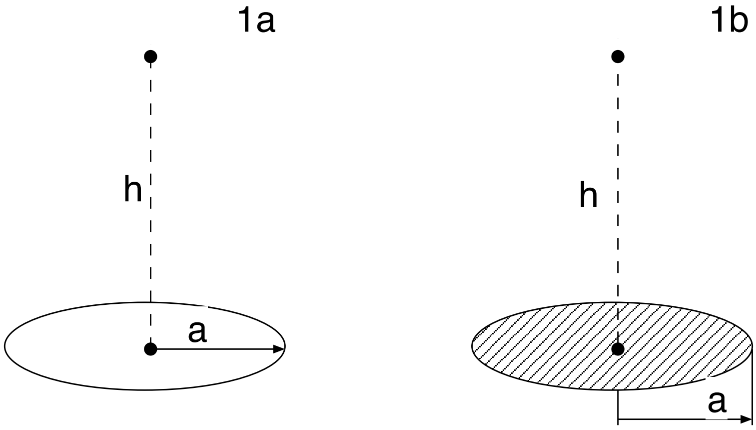
TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 19 JANUARI 1996, 9–12 UUR.

1. *(a)* Een cirkelvormige *draad* (straal a) is uniform geladen (totale lading Q). Bereken het elektrische veld op een afstand h boven het middelpunt. (Zie figuur 1a.)
(b) Een cirkelvormige *schijf* (straal a) is uniform geladen (totale lading Q). Bereken het elektrische veld op een afstand h boven het middelpunt. (Zie figuur 1b.)



(c) De cirkelvormige schijf van opgave 1b wordt vervormd tot een elliptische schijf (de korte as van de ellips is a, de lange as is b). Wat wordt het elektrische veld voor $h \gg b$?

2. In de magnetostatica gelden tussen de vectorpotentiaal $\vec{A}$, het magnetische veld $\vec{B}$ en de stroomdichtheid $\vec{j}$ de relaties

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}, \\ &\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \end{aligned}$$

(a) Als $\vec{j}$ bekend is (en $\vec{j} \to 0$ voor $r \to \infty$), kan $\vec{B}$ gevonden worden met behulp van de formule van Biot en Savart. Schrijf deze formule nauwkeurig op.
(b) Als $\vec{B}$ bekend is (en $\vec{B} \to 0$ voor $r \to \infty$), kan $\vec{A}$ gevonden worden met behulp van de formule

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, d\vec{r}\,'. \tag{1}$$

Leid deze formule af.
(c) Als $\vec{B}$ constant is over de hele ruimte, kan vergelijking (1) niet gebruikt worden. Laat zien dat in dat geval geldt dat $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$.

3. In de elektrodynamica geldt de inhomogene golfvergelijking

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

voor de vectorpotentiaal $\vec{A}$ in de Lorentzijk.
(a) Geef de algemene oplossing en leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen.

We beschouwen nu het geval van een oneindig lange draad langs de z-as, waarin een constante stroom I_0 op tijdstip $t = 0$ abrupt wordt aangezet. Dat wil zeggen, de stroom $I(t)$ door de draad voldoet aan

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0, \\ I_0 & \text{voor } t > 0. \end{cases}$$

(b) Op een afstand R van de draad geldt dat $\vec{A} = 0$ voor $t < T$ en $\vec{A} \neq 0$ voor $t > T$. Bereken T.
(c) Bereken $\vec{A}$ voor $t > T$. Gegeven is de integraal

$$\int (a^2 + x^2)^{-1/2}\, dx = \ln[(a^2 + x^2)^{1/2} + x].$$

(d) Wat is het magnetische veld $\vec{B}$ op een afstand R van de draad in de limiet $t \to \infty$?

4. De ladingsdichtheid maal de lichtsnelheid $c\rho$ en de stroomdichtheid $\vec{j}$ vormen samen een viervector.
(a) Wat houdt deze bewering in?
(b) Waarom is deze bewering waar?
(c) Laat zien dat de wet van behoud van lading,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j},$$

relativistisch invariant is.