Tentamen Klassieke Elektrodynamica, 12 mei 2011, 14–17 uur.

1. De elektrostatische energie U van een ladingsdichtheid $\rho(\vec{r})$ met bijbehorende potentiaal $\Phi(\vec{r})$ is gegeven door

$$U_1 = \tfrac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})\, d\vec{r}.$$

(De potentiaal is op nul gesteld in het oneindige.) We kunnen de energie ook schrijven in termen van het elektrische veld,

$$U_2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \int |\vec{E}(\vec{r})|^2\, d\vec{r}.$$

(a) Bewijs dat $U_2 = U_1$, gebruik makend van de Maxwellvergelijkingen.

Een lading Q is uniform uitgespreid over een metalen bolschil (straal a). (Er zit geen lading binnen de bol.) De bol heeft een potentiaal V ten opzichte van het oneindige.
(b) Bereken de capaciteit $C = Q/V$ van de bol.
(c) Toon aan, dat de elektrostatische energie van de bol gelijk is aan $U = \tfrac{1}{2}Q^2/C$.

2. Het cylindersymmetrische tijdsafhankelijke magnetische veld $\vec{B}$ wordt gegeven door

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \begin{cases} B_0\hat{z}\cos\omega t & \text{als } x^2 + y^2 < a^2, \\ 0 & \text{als } x^2 + y^2 > a^2. \end{cases}$$

(a) Het opgegeven magneetveld is discontinu op de cylinderwand $R = a$. Waarom is dit niet in strijd met de Maxwellvergelijkingen?
(b) Bereken het bijbehorende elektrische veld $\vec{E}$, zowel voor $R < a$ als voor $R > a$. Is het continu of discontinu voor $R = a$?
(c) Bereken de elektromagnetische energie die door de cylinderwand op $R = a$ stroomt, gemiddeld over één periode $T = 2\pi/\omega$.

zie ommezijde

3. De tijdsafhankelijke elektrische potentiaal in de Lorentzijk voldoet aan de inhomogene golfvergelijking

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t).$$

(a) Leid deze vergelijking af uit de Maxwellvergelijkingen.
(b) Geef de oplossing voor de potentiaal Φ als een integraal van de ladingsdichtheid ρ en leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen.

Er is een andere keuze van ijk mogelijk, waarbij $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r},t) = 0$.
(c) Leid af, wat dan de differentaalvergelijking is die Φ aan ρ relateert. Wat is nu de oplossing?

4. *(a)* Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat elektromagnetische golven in vacuüm transversaal zijn.
(b) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat elektromagnetische golven in vacuüm zich voortplanten met snelheid $(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$.
(c) Een vlakke elektromagnetische golf in vacuüm heeft zowel een elektrische als een magnetische energiedichtheid. Bereken de verhouding van deze twee energie-dichtheden.

antwoorden tentamen KED, 12 mei 2011

1. *(a)* zie college.
   (b) $\Phi(\vec{r}) = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}Q/r$ voor $r \geq a$, dus $V = Q/4\pi\varepsilon_0 a$ en dus $C = 4\pi\varepsilon_0 a$.
   (c) $U = QV/2 = Q^2/2C$.

2. *(a)* MIII impliceert dat de loodrechte component van het magneetveld continu zijn op een oppervlak. Daar is aan voldaan.
   (b) $\vec{E} = \hat{\phi}\,\frac{1}{2}RB_0\,\omega\sin\omega t$ als $R \leq a$;
   $\vec{E} = \hat{\phi}\,\frac{1}{2}(a^2/R)B_0\,\omega\sin\omega t$ als $R > a$. Het elektrisch veld is evenwijdig aan het oppervlak, en dus continu.
   (c) energiestroomdichtheid $\vec{j}_u = (1/\mu)\vec{E}\times\vec{B} \propto \sin\omega t\cos\omega t$ middelt uit tot nul over één periode.

3. *(a)* en *(b)*: zie college.
   (c) $\Delta\Phi(\vec{r},t) = -\rho(\vec{r},t)/\varepsilon_0$; $\Phi(\vec{r},t) = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}\int\rho(\vec{r}\,',t)|\vec{r}\,'-\vec{r}|^{-1}\,d\vec{r}\,'$

4. *(a)* en *(b)* zie college.
   c) $c|\vec{B}| = |\vec{E}|$, dus $(\varepsilon_0/2)|\vec{E}|^2 = (1/2\mu_0)|\vec{B}|^2$; dus de verhouding is 1 : 1.