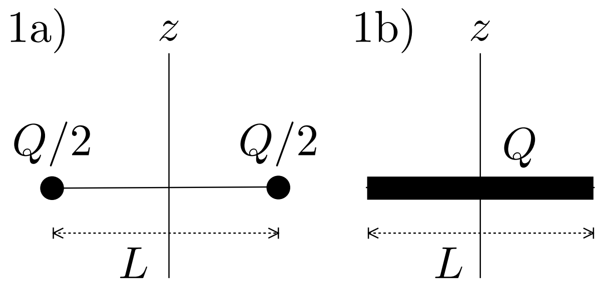
TENTAMEN KLASSIEKE ELEKTRODYNAMICA, 22 AUGUSTUS 2011, 14–17 UUR.

1. *(a)* Bereken het elektrische veld $\vec{E}$ (grootte en richting) op een afstand z boven het midden tussen twee gelijke puntladingen $\frac{1}{2}Q$. De afstand tussen de ladingen is L. (Zie figuur 1a.)
   (b) Bereken[1] $\vec{E}$ op een afstand z boven het midden van een draad van lengte L, die uniform geladen is met totale lading Q. (Zie figuur 1b.)
   (c) Wat wordt $\vec{E}$ uit opgave b als $z \gg L$? Waarom kunt u dit antwoord ook zonder berekening vinden?



2. De arbeid dW/dt per tijdseenheid die de elektromagnetische velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ verrichten op een ladingsverdeling ρ en stroomverdeling $\vec{j}$ is gegeven door

$$\frac{dW}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \vec{E} \cdot \vec{j}.$$

   (a) Waarom verricht het magnetische veld geen arbeid?
   (b) Pas deze vergelijking toe op een stroomkring (stroom I, zelfinductieco-ëfficient L). Leid af dat

$$\frac{dW}{dt} = -LI\frac{dI}{dt}.$$

   (c) De stroom I wordt langzaam vergroot van I_1 tot I_2. Bereken de verandering in de magnetische energie van de spoel. Is het een afname of een toename?

Zie ommezijde

[1] Wellicht zijn de volgende integralen nuttig om te weten:
$\int (1+x^2)^{-3/2}dx = x(1+x^2)^{-1/2}$,
$\int x(1+x^2)^{-3/2}dx = -(1+x^2)^{-1/2}$,
$\int x(1+x^2)^{-1/2}dx = (1+x^2)^{1/2}$.

3. *(a)* Gegeven zijn de elektrische potentiaal $\Phi = 0$ en de vectorpotentiaal $\vec{A} = A_0(\vec{r} \times \hat{z})$, waarbij A_0 een constante is en $\hat{z}$ een eenheidsvector in de z-richting. Bereken de bijbehorende elektrische en magnetische velden.
   (b) Construeer een ijktransformatie van $\vec{A}$ naar $\vec{A}' = (2A_0 y, 0, 0)$. Verandert Φ ook door deze transformatie?
   (c) Stel nu dat A_0 niet constant is, maar van de tijd afhangt volgens $A_0 = a_0 \cos \omega t$. Wat zijn dan de elektrische en magnetische velden?

4. Een student die iets begrepen heeft van het verschijnsel "retardatie" schrijft de volgende formule op voor de elektrische potentiaal van een bewegende puntlading q:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_P(t_R)|}, \quad \text{met} \quad c(t - t_R) = |\vec{r} - \vec{r}_P(t_R)|.$$

   Hij legt uit dat $\vec{r}_P(t_R)$ de positie is van de puntlading op de geretardeerde tijd t_R, die eerder is dan t omdat het elektrische veld er een tijd $t - t_R$ over doet om van de puntlading de waarnemer te bereiken.
   (a) Welke vergissing maakt deze student? Corrigeer zijn formule en/of uitleg.
   (b) Leg uit, hoe je uit de elektrische potentiaal de vectorpotentiaal van de puntlading kunt vinden.
   (c) Stel nu dat de puntlading met constante snelheid v langs de x-as naar rechts beweegt. Bereken de elektrische potentiaal op de x-as rechts van de lading.

antwoorden tentamen KED, 22 augustus 2011

1. *(a)* de x en y-componenten van het veld zijn nul vanwege de symmetrie; voor $\vec{r}$ de vector tussen lading en waarnemer, is de z-component gegeven door $E_z = (Q/4\pi\varepsilon_0)(\hat{z}\cdot\vec{r})r^{-3} = (Q/4\pi\varepsilon_0)z(\frac{1}{4}L^2 + z^2)^{-3/2}$.
   (b) $E_z = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}\int_{-L/2}^{L/2}(Q/L)dx\, z(x^2+z^2)^{-3/2} = (Q/4\pi\varepsilon_0)z^{-1}(\frac{1}{4}L^2+z^2)^{-1/2}$.
   (c) $\vec{E} \to \hat{z}(Q/4\pi\varepsilon_0)z^{-2}$ = veld van puntlading Q in oorsprong.

2. *(a)* De Lorentzkracht $\vec{v}\times\vec{B}$ staat loodrecht op de snelheid en verricht dus geen arbeid.
   (b) $\vec{E}\cdot\vec{j}\,d\vec{r} = I\vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow dW/dt = I\oint\vec{E}\cdot d\vec{l} = -Id\Phi/dt = -LIdI/dt$, waarbij de magnetische flux gegeven is door $\Phi = LI$.
   (c) $\Delta U_{\rm m} = -\int_{t_1}^{t_2}(dW/dt)dt = \frac{1}{2}L(I_2^2 - I_1^2) > 0$, dus een toename.

3. *(a)* $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = -2A_0\hat{z}$; $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t = 0$.
   (b) $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$ met $\chi = A_0xy$; $\Phi' = \Phi - \partial\chi/\partial t = \Phi = 0$.
   (c) $\vec{B} = -2a_0\cos\omega t\,\hat{z}$; $\vec{E} = -(dA_0/dt)(\vec{r}\times\hat{z}) = a_0\omega\sin\omega t\,(y\hat{x} - x\hat{y})$.

4. *(a)* Er is ook een effect van schijnlading, die de noemer in de vergelijking voor Φ verandert in $|\vec{r} - \vec{r}_P(t_R) - \vec{v}(t_R)\cdot\big(\vec{r} - \vec{r}_P(t_R)\big)/c|$.
   (b) $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{v}(t_R)c^{-2}\Phi(\vec{r},t)$, met $\vec{v}(t)$ de snelheid van de puntlading.
   (c) $\Phi(\vec{r},t) = (q/4\pi\varepsilon_0)|x - vt|^{-1}$; de effecten van schijnlading en retardatie heffen elkaar op.