TENTAMEN KLASSIEKE ELEKTRODYNAMICA, 13 APRIL 2012, 14–17 UUR.

1. Toen de Maxwellvergelijkingen nog niet bekend waren, wisten Gauss en Ampère al hoe je de elektrische en magnetische velden kon berekenen, voor *tijdsonafhankelijke* ladingen en stromen. De wetten van Gauss en Ampère luiden

   $$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

   (a) Laat zien dat deze wetten niet kunnen gelden voor *tijdsafhankelijke* ladingen en stromen.
   (b) Faraday had al vóór Maxwell ontdekt dat een tijdsafhankelijke magnetische flux $\Phi(t)$ door een stroomkring een potentiaalverschil $V = d\Phi/dt$ opwekt. Leid hieruit één van de Maxwellvergelijkingen af.
   (c) Schrijf de Maxwellvergelijkingen in vacuum op en beschouw een oplossing met bolsymmetrie: $\vec{E} = f(r,t)\hat{r}$, $\vec{B} = g(r,t)\hat{r}$. Leid af dat deze elektrische en magnetische velden tijdsonafhankelijk moeten zijn.

2. Een lange cylindervormige metalen draad (straal a) heeft een geleidingsvermogen σ. Door de draad loopt een stroom I. (U mag veronderstellen dat de stroomdichtheid $\vec{j}$ in de draad constant is.)

   (a) Bereken zowel het elektrische veld $\vec{E}$ als het magnetische veld $\vec{B}$ in het binnenste van de draad (grootte en richting).
   (b) De elektromagnetische velden verrichten op de ladingen in de draad een arbeid $\vec{E} \cdot \vec{j}$ per volume-eenheid en per tijds-eenheid. Waarom komt $\vec{B}$ in deze uitdrukking niet voor? Bereken de totale verrichte arbeid in een tijd T voor een draad van lengte L.
   (c) We kunnen de verrichte arbeid ook berekenen door middel van de stelling van Poynting, uitgaande van de elektromagnetische energie die van buitenaf de draad instroomt. Geef deze berekening en ga na dat het antwoord hetzelfde is als in *b*.

3. Een *neutraal* molekuul op positie r_0 heeft een ladingsverdeling gegeven door $\rho(\vec{r}) = f(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Het dipoolmoment is $\vec{p}$.
   (a) Bewijs dat het dipoolmoment $\vec{p}$ van dit molekuul niet verandert als we het verplaatsen van $\vec{r}_0$ naar $\vec{r}_0 + \delta\vec{r}$.
   (b) Stel dat de ladingsverdeling bolsymmetrisch is, d.w.z. $\rho(\vec{r}) = f(|\vec{r} - \vec{r}_0|)$ hangt alleen af van de afstand tot $\vec{r}_0$. Bewijs dat het dipoolmoment dan gelijk is aan nul.
   (c) We leggen een uniform elektrisch veld $\vec{E}$ aan. Op een ladingselementje dq, ter plaatse $\vec{r}$, oefent dit elektrische veld een kracht (force) $d\vec{F} = \vec{E}dq$ uit en een koppel (torque) $d\vec{K} = (\vec{r} \times \vec{E})dq$.
   Bereken de kracht $\vec{F}$ en koppel $\vec{K}$ op het hele molekuul.

zie ommezijde

4. Beschouw een stroomdichtheid $\vec{j}(\vec{r},t)$ en een ladingsdichtheid $\rho(\vec{r},t)$ die met frequentie ω van de tijd afhangen. In de complexe notatie kunnen we schrijven

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\, \vec{j}(\vec{r}) e^{i\omega t}, \quad \rho(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\, \rho(\vec{r}) e^{i\omega t}.$$

We willen de elektromagnetische potentialen vinden in de Lorentz-ijk,

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{r},t).$$

Ook voor deze potentialen gebruiken we de complexe notatie,

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\, \vec{A}(\vec{r}) e^{i\omega t}, \quad \Phi(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\, \Phi(\vec{r}) e^{i\omega t}.$$

(a) Ga uit van de algemene oplossing van de inhomogene golfvergelijking en bewijs dat

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{r}'\, e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \vec{j}(\vec{r}'), \\ \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\vec{r}'\, e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \rho(\vec{r}'). \end{aligned}$$

Hoe hangt k af van ω?
(b) Welke relatie tussen de complexe, tijdsonafhankelijke functies $\vec{j}(\vec{r})$ en $\rho(\vec{r})$ volgt uit de wet van behoud van lading? En welke relatie tussen $\vec{A}(\vec{r})$ en $\Phi(\vec{r})$ volgt uit de Lorentz-ijk?
(c) Bewijs dat het resultaat in onderdeel *a* voldoet aan de Lorentz-ijk.

antwoorden tentamen KED, 13 april 2012

1. *(a)* wet van behoud van lading: $d\rho/dt = -\nabla\cdot\vec{j}$; de wet van Ampère geeft, na het nemen van de divergentie, $\nabla\cdot\vec{j} = 0$, dus die geldt alleen als ρ tijdsonafhankelijk is.
(b) $V = -\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$, en $d\Phi/dt = \int_S (\partial\vec{B}/\partial t)\cdot d\vec{S}$; dus $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$.
(c) in vacuum: $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ en $\nabla\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t$; de rotatie van bolsymmetrische velden is nul, dus zowel $\vec{E}$ als $\vec{B}$ zijn tijdsonafhankelijk.

2. *(a)* $E = I/(\sigma\pi a^2)$ langs de draad; $\vec{B} = \hat{\phi}\mu_0 Ir/(2\pi a^2)$ (in cylindercoordinaten)
(b) $W = TLI^2/(\sigma\pi a^2)$ ($\vec{B}$ staat loodrecht op de verplaatsing en verricht dus geen arbeid)
(c) $W = TL2\pi a\hat{r}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})/\mu_0$, voor $r = a$; hetzelfde als in *b*.

3. *(a)* $\vec{p}\,' = \int d\vec{r}\,\vec{r}\rho(\vec{r}-\delta\vec{r}) = \vec{p} + \delta\vec{r}\int d\vec{r}\,\rho(\vec{r}) = \vec{p}$ want het molekuul heeft totale lading nul.
(b) kies zonder verlies van algemeenheid $\vec{r}_0 = 0$; dan is $\vec{p} = \int d\vec{r}\,\vec{r}f(r) = 0$ omdat de bijdragen van $\vec{r}$ en $-\vec{r}$ elkaar opheffen.
(c) $\vec{F} = \int d\vec{r}\,\rho(\vec{r})\vec{E} = 0$, $\vec{K} = \int d\vec{r}\,\rho(\vec{r})\vec{r}\times\vec{E} = \vec{p}\times\vec{E}$.

4. *(a)* algemene oplossing:
$\vec{A}(\vec{r},t) = (\mu_0/4\pi)\mathrm{Re}\int d\vec{r}\,'\,\vec{j}(\vec{r}\,', t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)|\vec{r}-\vec{r}\,'|^{-1}$,
waarbij $t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$ de geretardeerde tijd is; invullen geeft de gevraagde uitdrukking, met $k = \omega/c$; evenzo voor Φ.
(b) $\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r}) + i\omega\rho(\vec{r}) = 0$; $\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r}) + (i\omega/c^2)\Phi(\vec{r}) = 0$.
(c) bereken eerst $(\partial/\partial\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})$; de afgeleide naar $\vec{r}$ kan omgeschreven worden naar een afgeleide naar $\vec{r}\,'$ van $e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}|\vec{r}-\vec{r}\,'|^{-1}$, met een minteken, en vervolgens via partiële integratie als een afgeleide naar $\vec{r}\,'$ van $\vec{j}(\vec{r}\,')$, weer met een minteken. Beide mintekens heffen elkaar op, en je vindt

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\vec{r}\,'\,e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,') = -(i\omega/c^2)\Phi(\vec{r}).$$