Tentamen Klassieke Elektrodynamica, 29 mei 2012, 14–17 uur.

1. *(a)* Veronderstel dat u maar drie van de vier Maxwellvergelijkingen kent: alleen de ene wet $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ kent u *niet*. U meet op $t = 0$ een magnetisch veld en u vindt dat de divergentie van dat magnetische veld nul is. Bewijs dat de divergentie van $\vec{B}$ dan ook voor $t > 0$ gelijk aan nul moet blijven.

   (b) Nu mag u gewoon weer alle vier de Maxwellvergelijkingen als bekend veronderstellen. Een vlakke elektromagnetisch golf in vacuüm heeft de vorm

   $$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t), \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t).$$

   Leid een relatie af tussen de grootte en de richting van de amplitudes $\vec{E}_0$ en $\vec{B}_0$.

   (c) Bereken de energiedichtheid U van het elektromagnetische veld in onderdeel b en de Poynting vector $\vec{j}_u$. Laat zien dat $|\vec{j}_u| = cU$ en interpreteer dit resultaat.

2. Gegeven is het elektrische veld $\vec{E} = \hat{z} f(R) \cos \omega t$, met f een willekeurige functie van $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (a) Bereken de bijbehorende ladingsdichtheid ρ.

   (b) Gegeven is ook dat het magneetveld $\vec{B}$ overal gelijk is aan nul op tijd $t = 0$. Bereken $\vec{B}(\vec{r},t)$ voor $t > 0$.

   (c) Veronderstel dat dit elektromagnetische veld zich in vacuum bevindt. Bewijs dat de functie $f(R)$ dan voldoet aan de differentiaalvergelijking

   $$(\omega/c)^2 f + (1/R) f' + f'' = 0.$$

   (U hoeft de differentiaalvergelijking *niet* op te lossen.)

3. *(a)* Beschouw een gesloten kromme die een magnetische flux ϕ omvat. Laat zien, dat uit de definitie van de vektorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$ volgt dat $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \phi$.

   (b) Een oneindig lange, cylindrische spoel (straal R_0) omvat een magnetische flux ϕ_0. Bereken de vektorpotentiaal $\vec{A}_0(\vec{r})$ binnen en buiten de spoel.
   (U mag veronderstellen dat het magneetveld buiten de spoel nul is, en binnen de spoel uniform en axiaal gericht.)

   (c) Stel $\phi_0 \neq 0$. Is het mogelijk om door middel van een ijktransformatie van $\vec{A}_0(\vec{r})$ een nieuwe vektorpotentiaal te construeren die gelijk is aan nul buiten de spoel? Beargumenteer uw antwoord.

ga verder met opgave 4 op de achterkant

4. In het college hebben we in de elektrodynamica gebruik gemaakt van de Lorentz-ijk. In deze opgave onderzoeken we een andere ijk, de zogenaamde Coulomb-ijk. De Coulomb-ijk luidt

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0.$$

(a) Laat zien dat in de Coulomb-ijk de scalaire potentiaal Φ voldoet aan de Poissonvergelijking

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}, t).$$

(b) Wat is de algemene oplossing van deze vergelijking?

(c) De potentiaal Φ reageert instantaan op veranderingen in de ladingsdichtheid ρ. Beargumenteer waarom hier geen sprake is van een schending van het principe van de relativiteitstheorie “dat geen signaal zich sneller kan voortplanten dan met de lichtsnelheid”.

antwoorden tentamen KED, 29 mei 2012

1. *(a)* $(\partial/\partial t)\nabla \cdot \vec{B} = -\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0$
(b) $\vec{E}_0$ en $\vec{B}_0$ staan loodrecht op elkaar en op de x-richting, $E_0 = cB_0$
(c) $U = (1/2)E_0^2(\varepsilon_0 + 1/c^2\mu_0)\cos^2(kx - \omega t) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$; $\vec{j}_u = \hat{x}(1/c\mu_0)E_0^2\cos^2(kx - \omega t) = cU$; energiestroomdichtheid = snelheid maal energiedichtheid, dus de golf plant zich voort met snelheid c.

2. *(a)* $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, dus $\rho = 0$.
(b) $\nabla \times \vec{E} = -\hat{\phi} f'(R)\cos\omega t = -\partial\vec{B}/\partial t$, dus $\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{\phi}(1/\omega)f'(R)\sin\omega t + \vec{B}_0(\vec{r})$, en $\vec{B}_0 = 0$ omdat $\vec{B}(\vec{r}, 0) = 0$.
(c) $\nabla \times \vec{B} = \hat{z}(1/\omega)(f'/R + f'')\sin\omega t = (1/c^2)\partial\vec{E}/\partial t = -\hat{z}(1/c^2)f\omega\sin\omega t$, omdat $\vec{j} = 0$.

3. *(a)* $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint(\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi$.
(b) $\vec{A}_0 = \hat{\phi}(\phi_0/2\pi R)$ als $R > R_0$; $\vec{A}_0 = \hat{\phi}(\phi_0/2\pi R)(R/R_0)^2$ als $R < R_0$.
(c) Neen: dan zou $\oint_C \vec{A}_0' \cdot d\vec{l} = 0$ voor C een kring die de spoel omvat, terwijl deze integraal juist $\phi_0 \neq 0$ moet opleveren.

4. *(a)* $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$, $\nabla \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = -\rho/\varepsilon_0$.
(b) $\Phi(\vec{r}, t) = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}\int d\vec{r}'\,\rho(\vec{r}', t)|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$.
(c) Om een signaal over te brengen moet het elektrische veld veranderen, de potentiaal zelf is niet waarneembaar. Omdat $\vec{A}$ i.t.t. Φ niet instantaan verandert, zal ook $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$ dat niet doen.