TENTAMEN KLASSIEKE ELEKTRODYNAMICA, 10 JULI 2015, 14–17 UUR.

1. Een tijdsonafhankelijke stroom $\vec{j}(\vec{r})$ wekt een magnetisch veld $\vec{B}(\vec{r})$ op. De bijbehorende vektorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$ is gedefinieërd door

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}). \tag{1}$$

(a) De vektorpotentiaal wordt door vergelijking (1) niet uniek bepaald. Stel dat ik twee oplossingen $\vec{A}'$ en $\vec{A}$ heb gevonden. Waar moet het verschil $\vec{A}-\vec{A}'$ dan aan gelijk zijn? Verzin een extra vergelijking waar $\vec{A}$ aan moet voldoen om haar uniek vast te leggen.
(b) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat $\vec{A}$ zó gekozen kan worden dat zij voldoet aan de Poissonvergelijking

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\,\vec{j}(\vec{r}). \tag{2}$$

(c) Als de stroom van de tijd afhangt, dan zal ook het magnetisch veld tijdsafhankelijk worden. Een medestudent van u merkt op dat beide vergelijkingen (1) en (2) nog steeds gelden, alleen moet je overal het argument $(\vec{r})$ vervangen door $(\vec{r}, t)$. Is dit “helemaal goed”, “halfgoed”, of “helemaal fout”? Beargumenteer uw antwoord.

2. De algemene oplossing van de Poissonvergelijking (2) luidt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d\vec{r}'. \tag{3}$$

(a) Een andere medestudent van u heeft moeite met vektornotatie en wil graag de oplossing zien in termen van de afzonderlijke coördinaten. Als eerste poging heeft deze student vergelijking (3) als volgt herschreven voor de x-component van de vektorpotentiaal:

$$A_x(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{j_x(x',y,z)}{|x-x'|}\,dx'. \tag{4}$$

Leg uit welke fouten in vergelijking (4) zijn gemaakt, en corrigeer die fouten (zonder gebruik te maken van vektornotatie).
(b) In veel toepassingen loopt de stroom door een dunne draad, die op een willekeurige manier een gesloten kromme C in de ruimte beschrijft. Vergelijking (3) kan dan herschreven worden in een vorm waar de stroomdichtheid $\vec{j}$ niet meer in de integraal voorkomt, alleen de totale stroom I komt nog voor (en omdat I constant is kan je deze buiten de integraal halen). Leidt zo’n formule af. Geef in een tekening aan, wat de gebruikte symbolen betekenen.

zie ommezijde

(c) Dezelfde medestudent van opgave 1 vraagt zich af hoe de algemene oplossing (3) aangepast moet worden als $\vec{j}$ van de tijd afhangt. Een eerste poging luidt:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,'. \tag{5}$$

Leg eerst uit in woorden, zonder wiskundige formules te gebruiken, waarom deze aanpassing niet goed kan zijn. Geef vervolgens de juiste formule.

3. Een bolschil met straal R en middelpunt in de oorsprong heeft oppervlakteladingsdichtheid $\sigma = \sigma_0 \cos\phi \sin\theta$ (in bolcoördinaten).
(a) Bereken de totale lading Q en het elektrische dipoolmoment $\vec{p}$ (grootte en richting).
(b) Geef een benadering voor de elektrische potentiaal Φ op een punt op de x-as, op een grote afstand L van het middelpunt van de bol.
(c) Stel dat de oppervlakteladingsdichtheid anders is, namelijk $\sigma' = \sigma_0 \sin\theta$. Hoe zou u dan de vraag in onderdeel *(b)* beantwoorden?
Hint: Wat is nu de totale lading op de bol?

4. In deze opgave onderzoeken we vlakke, monochromatische elektromagnetische golven in vacuüm. Alle afleidingen dienen uit te gaan van de Maxwell-vergelijkingen.
(a) We onderscheiden longitudinale golven, die trillen in de bewegingsrichting, en transversale golven, die trillen loodrecht op de bewegingsrichting. Leid af, of elektromagnetische golven longitudinale golven dan wel transversale golven zijn.
(b) De knoop van een golf is een punt in de ruimte waar, op een gegeven moment, de amplitude nul is. Een elektromagnetische golf heeft zowel een elektrische als een magnetische amplitude. Leid af, dat de knopen voor beide amplitudes samenvallen.
(c) Leid af, dat de elektromagnetische golf zich voortplant met snelheid $(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$.

antwoorden tentamen KED, 10 juli 2015

1. *(a)* $\vec{A}' - \vec{A} = \nabla\chi$, div $\vec{A} = 0$.
   (b) kies div $\vec{A} = 0$, rot $\vec{B}$ = rot rot $\vec{A} = -\Delta\vec{A}$ + grad div $\vec{A} = -\Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}$.
   (c) vgl. 1 is nog steeds geldig, omdat div $\vec{B} = 0$, vgl. 2 geldt niet meer, omdat rot $\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t$.

2. *(a)* $A_x(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} j_x(x',y',z')[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}\,dx'dy'dz'$.
   (b) $\vec{A}(\vec{r}) = (\mu_0 I/4\pi)\int \hat{n}_t|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}\,dl$, met $\hat{n}_t$ een eenheidsvector tangentieel aan de draad en dl een lengte-elementje langs de draad. De noemer is de afstand van de waarnemer $\vec{r}$ tot een punt $\vec{r}'$ op de draad.
   (c) Als je gewoon t invult, dan zal $\vec{A}$ en dus $\vec{B}$ instantaan reageren op verandering van $\vec{j}$; deze verandering kan zich niet sneller dan met de lichtsnelheid voortplanten, dus er moet met een vertraging rekening gehouden worden: vervang t door de geretardeerde tijd $t_R = t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c$.

3. *(a)* $Q = 0$, $\vec{p} = \hat{x}a^3\sigma_0\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\cos^2\phi\sin^2\theta = (4/3)\pi a^3\sigma_0\hat{x}$
   (b) $\Phi(\vec{r}) \approx (\vec{p}\cdot\vec{r})/(4\pi\varepsilon_0 r^3) = L^{-2}(a^3\sigma_0/3\varepsilon_0)$.
   (c) Nu is de totale lading niet langer nul, $Q = a^2\sigma_0\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\sin\theta = (\pi^2a^2/2)\sigma_0$. Dus we kunnen de bol benaderen door een puntlading, $\Phi \approx Q/4\pi\varepsilon_0 L$.

4. *(a)* vlakke golf in de x-richting, dus $\vec{E}$ hangt slechts van x af, dus div $\vec{E} = dE_x/dx = 0$ (in vacuüm), dus er is geen oscillerende component in de x-richting, dus het is een transversale golf; hetzelfde geldt voor $\vec{B}$.
   (b) kies $\vec{E}$ in de y-richting, dus $E_y = E_0\cos(kx-\omega t)$; dan geldt dat $\partial\vec{B}/\partial t = -\text{rot}\,\vec{E} = \hat{z}E_0 k\sin(kx-\omega t)$, dus $\vec{B} = \hat{z}(k/\omega)E_0\cos(kx-\omega t)$; dus als $kx-\omega t = (n+1/2)\pi$ dan zijn zowel $\vec{E}$ als $\vec{B}$ gelijk aan nul.
   (c) rot $\vec{B} = \hat{y}(k^2/\omega)E_0\sin(kx-\omega t) = \varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t = \hat{y}\varepsilon_0\mu_0\omega E_0\sin(kx-\omega t)$, dus golfsnelheid $= \omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.