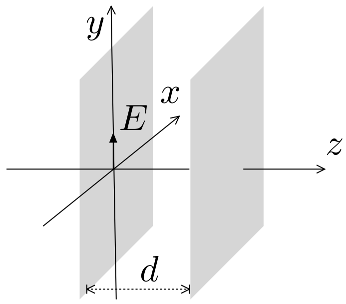
Tentamen Relativistische Elektrodynamica, 27 juni 2011, 10–13 uur.



1. Een elektromagnetische golf plant zich voort in de x-richting in de lege ruimte tussen twee oneindig grote, perfect geleidende platen, op $z = 0$ en $z = d$ (zie figuur). Beschouw een "transversaal elektrische" (TE) golf van de vorm

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{y}\,\mathrm{Re}\,E(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}. \tag{1}$$

(a) Geef de differentiaalvergelijking plus de randvoorwaarden waaraan de functie $E(z)$ moet voldoen.
(b) Bepaal de oplossing(en) en de relatie tussen k en ω.
(c) Voor $\omega < \omega_\mathrm{c}$ kan deze golf zich niet voortplanten. Bepaal de "cutoff-frequentie" ω_c.
(d) De cutoff-frequentie van de (transversaal magnetische) TM golf $\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{y}B_0 \cos(kx - \omega t)$ is gelijk aan nul. Waarom?
(e) Welke golf heeft een grotere groepsnelheid, de TE golf of de TM golf?

2. In de relativiteitstheorie geldt de tweede wet van Newton in de vorm

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{2}$$

maar *niet* in de vorm

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{3}$$

(a) Leg uit wat het verschil is tussen vergelijkingen (2) en (3). Waarom verdwijnt dit verschil in de klassieke mechanica?
(b) Een fan van Newton wil toch aan vergelijking (3) vasthouden en beschouwt dit dan als de definitie van kracht. Omdat het een definitie is, kun je niet spreken van "goed" of "fout". Waarom geven natuurkundigen de voorkeur aan vergelijking (2)?
(c) Stel een deeltje is in rust in inertiaalstelsel S. We beschouwen nu een tweede inertiaalstelsel S', wat ten opzichte van S met snelheid v_R in de x-richting beweegt. Bereken de kracht $\vec{F}'$ op het deeltje in stelsel S', gegeven de kracht $\vec{F}$ in stelsel S.
(d) Laat zien hoe de vector $\vec{K} = (1 - |\vec{v}|^2/c^2)^{-1/2}\,\vec{F}$ uit te breiden is tot een viervector.

zie ommezijde

3. *(a)* Geef de transformatieregels voor de potentialen $\Phi(\vec{r},t)$ en $\vec{A}(\vec{r},t)$ bij verandering van inertiaalstelsel S naar S'.
(b) Stel dat de potentialen in S voldoen aan de Lorentzijk,

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Waarom voldoen de potentialen in S' dan ook aan de Lorentzijk?
(c) De lading q is invariant onder Lorentztransformaties. Gebruik dit gegeven om af te leiden hoe de ladingsdichtheid ρ van een met snelheid v bewegend voorwerp verschilt ten opzichte van de ladingsdichtheid ρ_0 in het ruststelsel. Hoe valt ρ uit te breiden tot een viervector?
(d) Toon aan, dat de wet van behoud van lading,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{j}(\vec{r},t),$$

relativistisch invariant is (d.w.z. dat deze wet dezelfde vorm heeft in elk inertiaalstelsel).

antwoorden tentamen RED, 27 juni 2011

1. *(a)* golfvergelijking: $d^2E(z)/dz^2 - k^2E(z) + (\omega/c)^2E(z) = 0$; randvoorwaarde: $E(0) = 0 = E(b)$.
   (b) golfvergelijking geeft $E(z) = E_0 \sin k_n z$ met $k^2 + k_n^2 = (\omega/c)^2$; randvoorwaarde geeft $k_n = n\pi/d$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$.
   (c) $\omega_c = \pi c/d$, voor $\omega < \omega_c$ is k imaginair.
   (d) golfvergelijking geeft $k^2 = (\omega/c)^2$, er is geen randvoorwaarde (want de evenwijdige component van het magnetische veld mag discontinu zijn); dus k is reëel voor willekeurig kleine $\omega \Rightarrow \omega_c = 0$.
   (e) groepsnelheid $v = d\omega/dk$; voor de TM golf is $v = c$, voor de TE golf is $v < c$.

2. *(a)* $\vec{p} = m d\vec{r}/d\tau$, met eigentijd $\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Alleen in de klassieke limiet $v \ll c$ geldt $\vec{p} = m d\vec{r}/dt$.
   (b) De integraal van vgl. (2) langs een pad geeft de verrichtte arbeid en de toename van de energie; voor definitie (3) is er niet zo'n relatie.
   (c) $F'_x = F_x$, $F'_y = F_y/\gamma$, $F'_z = F_z/\gamma$, $\gamma = (1 - v_{\mathrm{R}}^2/c^2)^{-1/2}$.
   (d) $\vec{K} = d\vec{p}/d\tau$, $K_0 = dp_0/d\tau = c^{-1}dE/d\tau$.

3. *(a)* $(\Phi/c, \vec{A})$ transformeert als een viervector.
   (b) de Lorentzijk is het (Minkowski) inproduct van de viervector $(\Phi/c, \vec{A})$ met de viervector $(-\partial/\partial ct, \partial/\partial\vec{r})$ en het inproduct van twee viervectoren is invariant.
   (c) uit de Lorentzcontractie volgt $\rho = \rho_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Omdat $\vec{j} = \rho d\vec{r}/dt = \rho_0 d\vec{r}/d\tau$, is $(c\rho, \vec{j})$ een viervector.
   (d) de wet van behoud van lading is het inproduct van twee viervectoren.