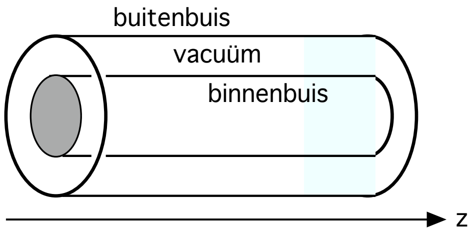
TENTAMEN RELATIVISTISCHE ELEKTRODYNAMICA,
24 AUGUSTUS 2011, 14–17 UUR.

1. Een co-axiale golfpijp bestaat uit een solide metalen binnenbuis en holle metalen buitenbuis (zie figuur). Elektromagnetische golven planten zich voort in het vacuüm tussen de twee buizen. De buizen liggen evenwijdig aan de z-as en zijn niet noodzakelijk cylindervormig. We onderzoeken de voortplanting van een zogenaamde TEM golf. Voor deze golf geldt dat zowel E_z als B_z gelijk zijn aan nul. Met andere woorden, de TEM golf heeft geen component in de voortplantingsrichting.



(a) Toon aan, dat we de TEM golf kunnen beschrijven door elektromagnetische potentialen $\vec{A}$ en Φ die voldoen aan:

$$A_x = 0, \;\; A_y = 0, \;\; \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} = 0.$$

(b) Kies de Lorentzijk $\partial A_z/\partial z = -\varepsilon_0\mu_0 \partial\Phi/\partial t$ en laat zien dat de functies $A_z(x, y, z, t)$ en $\Phi(x, y, z, t)$ dan beiden voldoen aan dezelfde *één-dimensionale* golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}, \;\; \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

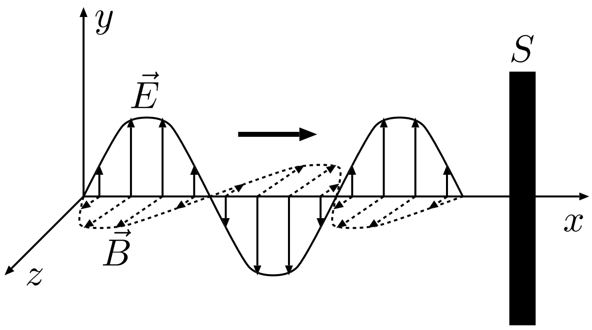
(c) Bewijs dat de afkapfrequentie van de TEM golf gelijk is aan nul (dat wil zeggen, dat de TEM golf zich voor willekeurig kleine frequenties kan voortplanten).
(d) Laat zien dat de x- en y-afhankelijkheid van A_z en Φ gegeven wordt door de *twee-dimensionale* Laplacevergelijking:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = 0, \;\; \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

(e) De randvoorwaarden voor de Laplacevergelijking zijn $\Phi = 0 = A_z$ op de buitenbuis en $\Phi = \Phi_0$, $A_z = A_0$ op de binnenbuis (met Φ_0 en A_0 constanten). Beargumenteer, waarom de binnenbuis noodzakelijk is voor het bestaan van de TEM golf.

zie ommezijde

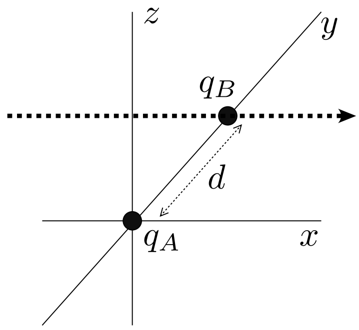
2. Beschouw een lineair gepolariseerde, monochromatische vlakke elektromagnetische golf, die zich in de x-richting in vacuüm voortplant. Het elektrische veld oscilleert in de y-richting, met amplitude E_0 (zie figuur).



(a) Bereken alle componenten van de Maxwell-stress-tensor voor deze golf.

De golf valt loodrecht op een absorberend vlak, met oppervlak S.
(b) Bereken de kracht die de golf op het vlak uitoefent, gemiddeld over de tijd.

3. Lading q_A is in rust in de oorsprong in inertiaalstelsel S. Lading q_B beweegt met snelheid v in de x-richting langs de lijn $y = d$, $z = 0$ (zie figuur). We beschouwen het moment dat q_B de y-as kruist.



(a) Wat is de elektromagnetische kracht $\vec{F}_B$ op q_B in stelsel S?
(b) Bereken de getransformeerde kracht $\vec{F}'_B$ in stelsel S' waarin q_B in rust is.
(c) Bereken ook de kracht $\vec{F}'_A$ op q_A in stelsel S'. Wat impliceert Uw antwoord voor de derde wet van Newton (actie = −reactie)?

4. Het inertiaalstelsel S' beweegt ten opzichte van inertiaalstelsel S met een snelheid v in de positieve x-richting.
(a) Leid uit de Lorentztransformatie van ruimte en tijd de relatie af tussen de partiële afgeleiden
$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ in stelsel S en $\frac{\partial}{\partial t'}, \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}$ in stelsel S'.
(b) Neem als uitgangspunt dat de Maxwellvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial x}E_y(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial y}E_x(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}B_z(\vec{r},t)$$

invariant is onder Lorentztransformatie. Leid hieruit af bepaalde transformatieregels voor E_x, E_y en B_z.

antwoorden tentamen RED, 24 augustus 2011

1. *(a)* $B_z = \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y = 0$, $E_z = -\partial\Phi/\partial z - \partial A_z/\partial t = 0$.
   (b) neem de $\partial/\partial z$ en de $\partial/\partial t$ van de Lorentzijkvergelijking.
   (c) zoek oplossing van de vorm $\Phi(\vec{r},t) = f(x,y)\cos(kz - \omega t)$ en vindt de dispersierelatie $k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$; dus een reëele k voor willekeurig kleine ω.
   (d) gebruik dat $\Delta A_z = \varepsilon_0\mu_0\partial^2 A_z/\partial t^2 = 0$ en $\Delta\Phi = \varepsilon_0\mu_0\partial^2\Phi/\partial t^2 = 0$, met Δ de drie-dimensionale Laplaciaan.
   (e) zonder binnenbuis is $\Phi = 0 = A_z$ een oplossing van de Laplacevergelijking met randvoorwaarden en omdat er maar één oplossing kan zijn is er dus geen TEM golf mogelijk.

2. *(a)* $T_{xx} = -\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(kx - \omega t)$, alle andere componenten zijn 0.
   (b) $F = -ST_{xx} \Rightarrow \bar{F} = (1/2)\varepsilon_0 E_0^2 S$.

3. *(a)* $\vec{F}_\mathrm{B} = \hat{y}\, q_\mathrm{A} q_\mathrm{B}/(4\pi\varepsilon_0 d^2)$.
   (b) $\vec{F}'_\mathrm{B} = \gamma\vec{F}_\mathrm{B}$.
   (c) $\vec{F}'_\mathrm{A} = -\hat{y}\, q_\mathrm{A} q_\mathrm{B}/(4\pi\varepsilon_0 d^2) \neq -\vec{F}'_\mathrm{B} \Rightarrow$ derde wet van Newton geldt niet in de relativistische mechanica.

4. *(a)* $(-c^{-1}\partial/\partial t, \partial/\partial\vec{r})$ transformeert als $(ct, \vec{r})$.
   (b) $E'_x = E_x$, $E'_y = \gamma(E_y - vB_z)$, $B'_z = \gamma(B_z - vc^{-2}E_y)$.