# Tentamen Relativistische Elektrodynamica, 25 juni 2012, 14–17 uur.

1. Gegeven is de volgende relatie tussen golfgetal $k$ en frequentie $\omega$ (de zogenaamde dispersierelatie): $\omega^2 = a^2 + b^2k^2$, met $a$ en $b$ positieve constanten.

   *(a)* Bereken het geometrische gemiddelde $\bar{v} = (v_{\text{groep}} v_{\text{fase}})^{1/2}$ van de groepsnelheid en de fasesnelheid.
   *(b)* Wat is de afkapfrequentie (cut-off frequency) $\omega_c$?
   *(c)* Voor frequenties $\omega < \omega_c$ valt de golf exponentiëel af als $e^{-x/\ell}$. Bereken de indringdiepte $\ell$.

2. Binnen een spoel langs de $z$-as (straal $a$, stroom $I$, $n$ windingen per lengte-eenheid) is een homogeen magnetisch veld $\vec{B} = B_0\hat{z}$, met $B_0 = \mu_0 nI$. Buiten de spoel is het magnetisch veld nul.

   *(a)* Bereken alle negen componenten van de Maxwell stress-tensor binnen en buiten de spoel.
   *(b)* Bereken, met behulp van de stress-tensor, de kracht (grootte en richting) die het magnetische veld op de spoel uitoefent, over een lengte $L$. Wat is de druk op de spoel?
   *(c)* Een mede-student vertelt je dat je die stress-tensor helemaal niet nodig hebt, dat je veel eenvoudiger uit kunt gaan van de Lorentzkracht op de bewegende lading in de spoel, en dan vindt je direct een druk $p = nB_0I$. Hoe zou je aan die mede-student kunnen uitleggen dat deze redenering een te grote waarde voor de druk geeft?

3. Beschouw twee inertiaalstelsels $S$ en $S'$. Het stelsel $S'$ beweegt ten opzichte van $S$ met een snelheid $v_{\text{R}}$ in de x-richting.
   *(a)* Bereken, uitgaande van de Lorentztransformatie, hoe de drie componenten $v_x, v_y, v_z$ van de snelheid transformeren bij overgang van $S$ naar $S'$.
   *(b)* Is het mogelijk om de snelheid uit te breiden tot een viervektor? Zo ja, wat is dan de vierde component; Zo nee, waarom niet.
   *(c)* Een deeltje beweegt in stelsel $S$ met de lichtsnelheid $c$ in de $y$-richting. Leid af dat de grootte van de snelheid in stelsel $S'$ nog steeds gelijk is aan $c$. *Let op:* de snelheid van het deeltje staat loodrecht op $v_{\text{R}}$.

4. Een waarnemer $W$ ziet een elektromagnetische golf in vacuum, gegeven door

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{y}, \quad \vec{B} = \frac{1}{c} E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z},$$

   met $\omega/k = c$. Een waarnemer $W'$ beweegt ten opzichte van $W$ met constante snelheid $v$ in de $x$-richting.
   *(a)* Bereken de amplitudes $|\vec{E}'|$ en $|\vec{B}'|$ van de elektrische en magnetische velden die $W'$ waarneemt, en ga na dat de verhouding nog steeds gelijk is aan de lichtsnelheid $c$.
   *(b)* Bereken hoe $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ van $x'$ en $t'$ afhangen.
   *(c)* Welke frequentie $\omega'$ en welk golfgetal $k'$ neemt $W'$ waar? Ga na dat de golfsnelheid $c'$ die volgt uit $\omega'$ en $k'$ nog steeds gelijk is aan $c$.

# antwoorden tentamen RED, 25 juni 2012

1. *(a)* $v_{\rm groep} = d\omega/dk = b^2k/\omega$, $v_{\rm fase} = \omega/k$, dus $\sqrt{v_{\rm groep}v_{\rm fase}} = b$.
   *(b)* $\omega_c = a$.
   *(c)* $k = i\kappa$ met $\kappa = \sqrt{a^2 - \omega^2}/b$; de golf valt af $\propto e^{-\kappa x}$, dus met indringdiepte $\ell = 1/\kappa$.

2. *(a)* buiten de spoel zijn geen elektromagnetische velden, dus is de stress-tensor nul; binnen de spoel geldt $T_{ij} = (1/\mu_0)(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}|\vec{B}|^2)$; alle niet-diagonaal componenten zijn nul, $T_{xx} = T_{yy} = -B_0^2/2\mu_0$, $T_{zz} = B_0^2/2\mu_0$.
   *(b)* integreer de Maxwell stresstensor over een oppervlak dat de windingen van de spoel omsluit; het buitenoppervlak draagt niets bij, het binnenoppervlak wel. De normaal op het binnenoppervlak is radiëel naar binnen gericht, dus $-\hat{R}$, maar de stress tensor componenten zijn negatief, dus de kracht op het oppervlak is radiëel naar buiten. Grootte: $F_0 = 2\pi aL|T_{xx}|$ per lengte-eenheid; druk $p = F_0/(2\pi aL) = \frac{1}{2}\mu_0(nI)^2 = \frac{1}{2}nB_0I$.
   *(c)* De Lorentzkracht-redenering overschat de kracht op de spoel, omdat bewegende lading geen kracht ondervindt van het magnetische veld dat zij zelf opwekt, alleen het magnetische veld van andere ladingen telt mee.

3. *(a)* $v'_x = (v_x - v_{\rm R})(1 - v_{\rm R}v_x/c^2)^{-1}$, $v'_y = (v_y/\gamma)(1 - v_{\rm R}v_x/c^2)^{-1}$, $v'_z = (v_z/\gamma)(1 - v_{\rm R}v_x/c^2)^{-1}$
   *(b)* neen, voor een viervector zouden de $y$ en $z$ componenten niet mogen veranderen
   *(c)* $v'_x = -v_{\rm R}$, $v'_y = c/\gamma = (c^2 - v_{\rm R}^2)^{1/2}$, $v'_z = 0$, dus $(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2 = c^2$

4. *(a)* $\vec{E}' = \gamma(\vec{E} - v|\vec{B}|\hat{y}) = \gamma(1 - v/c)E_0\cos(kx - \omega t)\hat{y}$, $\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - (v/c^2)|\vec{E}|\hat{z}) = \gamma(1 - v/c)(E_0/c)\cos(kx - \omega t)\hat{z}$; nog steeds is $|\vec{E}'|/|\vec{B}'| = c$.
   *(b)* vul in $x = \gamma[x' + (v/c)t']$, $t = \gamma[t' + (v/c^2)x']$.
   *(c)* $\cos(kx - \omega t)$ wordt $\cos(k'x' - \omega't')$ met $\omega' = \gamma(1 - v/c)\omega$, $k' = \gamma(1 - v/c)k$. De verandering van frequentie heet het Doppler-effect. De golfsnelheid $c' = \omega'/k' = \omega/k = c$ is onveranderd.