15

15

AANTREKKING

DOOR

LUCHTTRILLINGEN VEROORZAAKT.

AANTREKKING

DOOR

LUCHTTRILLINGEN VEROORZAAKT.

AKADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. D. BIERENS DE HAAN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

OP DONDERDAG 20 JUNIJ 1872, DES NAMIDDAGS TEN 1 URE,

DOOR

JAN NIEUWENHUIJZEN KRUSEMAN,

GEBOREN TE HAARLEM.

HAARLEM,
A. C. KRUSEMAN.
1872.

Gedrukt bij Gebr. van Asperen van der Velde, te Haarlem.

INHOUD.

Aan mijne Ouders.

Het zij mij vergund een woord van welgemeenden dank te wijden aan allen, die mij bij mijn studiën ter zijde gestaan hebben. In de eerste plaats aan U, Hooggeleerde Rijke, Hooggeschatte Promotor. Uw onderwijs, en niet minder de welwillendheid mij steeds door U betoond, zullen bij mij in dankbaar aandenken blijven.

Ik zal het mij steeds als een eer aanrekenen, Hooggeleerde Kaiser, onder het getal Uwer leerlingen te behooren.

U, Hooggeleerde Heeren Bierens de Haan en van Geer, dank ik voor het vele dat ik U verschuldigd ben.

Hooggeleerde Heeren van der Boon Mesch en Suringar, ook U blijf ik opregt erkentelijk voor uw onderwijs.

En ontvang ook Gij, Hooggeleerde Kundt, die mij in den vreemde zoo welwillend met raad en daad hebt gesteund, mijn innigsten dank.

Mij rest nog een pligt der dankbaarheid te vervullen jegens U, Hooggeschatte Heer Logeman, die op de baan der natuurwetenschap mijn eerste gids zijt geweest en wien ik mijn liefde voor haar te danken heb; en verder jegens allen, die belang in mij stellen, en in wier vriendschap ik mij met warmte blijf aanbevelen.

I.

INLEIDING.

Een zeer eenvoudige proef is het punt van uitgang voor de volgende beschouwingen. Wanneer een ligt voorwerp in de nabijheid van een stemvork is opgehangen, dan zal deze laatste, in trilling gebragt zijnde, dat voorwerp aantrekken. Hoewel deze proef eerst in den allerlaatsten tijd de aandacht eenigzins getrokken heeft, is zij niet zoo geheel nieuw; zij is het eerst genomen door Dr. Guyot, die haar in 1835 in een werk over luchtbeweging beschreven heeft. Na een reeks van gewaagde hypothesen, door hem in zijn "Éléments de physique générale" uitgesproken, was hij tot de slotsom gekomen, dat weegbare materie in trillende beweging, het medium, waarin zij zich bevindt, verdunt, dat medium moge een gas of de aether zijn; op dit beginsel steunende, hoopte hij de verschijnselen der algemeene aantrekkingskracht en de cohaesie te verklaren door een verdunning van den aether ten gevolge van moleculaire trillingen. Guyot twijfelde niet of trillende ligchamen moesten ook een verdunning van de omringende dampkringslucht te weeg brengen, waardoor voorwerpen, in de nabijheid geplaatst, als het ware naar die ligchamen heengezogen zouden worden.

Hij nam de proef met een stemvork, maar aanvankelijk zonder den gewenschten uitslag. Zoo vast was hij evenwel van de noodzakelijkheid van het verschijnsel overtuigd, dat zes maanden van vruchteloos zoeken hem niet ontmoedigden, en, volgens zijn zeggen, slechts de dood een einde aan zijn nasporingen zou hebben kunnen maken.

Of de vastheid dezer overtuiging door de deugdelijkheid harer gronden gewettigd was, laten wij in het midden. Zeker is het, dat in het eind de uitkomst Guyot's ijver bekroonde. Het gelukte hem de aantrekking van de stemvork op een zeer ligte stof (merg van de zonnebloem) aan te toonen; eenmaal meester van het feit zijnde, kostte het hem niet veel moeite de proef op allerlei wijzen en met verschillende zelfstandigheden te herhalen, totdat de aantrekking van de stemvork even tastbaar gemaakt was als die van den magneet. En niet alleen de stemvork vertoonde die eigenschap, maar trillende staven, klokken, snaren en platen deden het evenzeer. Guyot merkte nog op, dat bij deze laatsten de aantrekking zich niet vertoont in de nabijheid van de knoopen, en het sterkst daar, waar de beweging het sterkst is. Uit al deze proeven maakte hij de gevolgtrekking, dat de trillingen van vaste ligchamen de veerkrachtige media, waarin zij zich bevinden, in hun nabijheid verdunnen en daardoor hun drukking verminderen, terwijl die verdunning kleiner wordt naarmate de afstand tot het trillend oppervlak grooter wordt.

De proeven van Guyot zijn, met zijne speculatieve beschouwingen waaronder hij ze begraven had, in het vergeetboek geraakt; zelfs een nieuwe mededeeling, door hem daarover in 1861 in de "Presse scientifique" geplaatst, schijnt onopgemerkt gebleven te zijn, totdat Prof. Guthrie er onlangs de aandacht op vestigde. Deze laatste had de verhandeling van Guyot eerst leeren kennen nadat hij zelf de aantrekkingsverschijnselen bij trillende stemvorken, zooals hij meende voor het eerst, gezien had, terwijl bijna gelijktijdig en onafhankelijk van hem Schellbach zich met dergelijke onderzoekingen bezig hield. Opmerking verdient het dat Guthrie en Schellbach, zoowel als Guyot, op de mogelijkheid wijzen dat een juiste verklaring van het besproken feit eenmaal de sleutel kan worden tot de verklaring van de overige bekende aantrekkingsverschijnselen, bij welke dan de aethertrillingen dezelfde rol zouden spelen als de luchttrillingen bij de aantrekking van stemvorken.

Voorbarig en onwetenschappelijk zou het zijn, zich door deze verwachting te veel te laten meêslepen en er nu reeds hypothesen op te bouwen; maar zeer natuurlijk is het dat die gedachte zich moest opdringen bij het zien van een verschijnsel, waarbij periodische beweging en aantrekking zich in zulk een onmiddellijk verband vertoonen.

Een groot deel toch der natuurkundige wetenschap wordt tegenwoordig door de studie der periodische bewegingen beheerscht, en zoo de verschijnselen die binnen dat gebied vallen al niet een volledige verklaring gevonden hebben, zoo is toch de weg tot die verklaring gebaand. Aan den anderen kant bieden de verschijnselen der algemeene aantrekkingskracht en de elektrische aantrekking tot nog toe aan iedere poging tot verklaring weêrstand; en toch wijst de wet van het behoud van arbeidsvermogen, door de ervaring van iederen dag gesteund, telkens op een nauwe betrekking tusschen de eerste en de laatste klasse van verschijnselen. Geen wonder dus, dat de ontdekking van het genoemde feit eenigermate de hoop deed ontstaan, dat het wat licht zou werpen op de nog zoo raadselachtige aantrekkingsverschijnselen. Deze en dergelijke gevolgtrekkingen, zoolang zij nog niet den geringsten steun van de ervaring verkregen hebben, latende voor hetgeen zij zijn, kan men toch niet ontkennen, dat het feit zelf merkwaardig genoeg is om er bij stil te staan en er een verklaring voor te zoeken. Vreemd genoeg, hebben nog weinigen zich met dat onderzoek bezig gehouden.

In het Aprilnummer 1871 van het "Philosophical magazine" komt een artikel voor van Prof. Challis: "On approach caused by vibrations of the air," waarin hij in zeer algemeene trekken uit de grondbeginselen der hydrodynamika het verschijnsel van de aantrekking der stemvorken verklaart. Die verklaring kwam mij bij de lezing zoo aannemelijk voor, dat ik besloot haar eenigzins nader uit te werken.

Alvorens daartoe over te gaan, is het noodig een overzigt te geven van de proeven, door Guthrie en Schellbach genomen, en daarna van de wiskundige theorie van de beweging der gassen, daar zich de beschouwingen van Challis onmiddellijk daaraan aansluiten.

Het vermogen van een trillende stemvork om ligte voorwerpen aan te trekken, was niet het eerste verschijnsel, tot de klasse der hier besprokene behoorende, dat Schellbach opmerkte; zijn opmerkzaamheid werd het eerst getrokken door het volgende: De vlam eener stearinekaars was bijna in aanraking gebragt met een horizontaal bevestigde stemvork van 256 trillingen; zoodra de vork in trilling gebragt was, werd de vlam zeer kennelijk afgestooten zoolang als de vork trilde. Als de vlam onder de vork geplaatst was, werd zij naar beneden gedrukt en tot een schijf uitgespreid. Een kaarsvlam aan den mond van een met een stemvork voorzienen klankbodem werd sterk en aanhoudend afgestooten zoolang als de vork geluid gaf; bij zeer hevige trilling van de vork werd de vlam uitgebluscht. Een gasvlam van een centimeter lengte, gevoed door een nauwe glazen buis, splitste zich in twee tongen, wanneer zij voor de opening van den klankbodem geplaatst was. De rook van een smeulende kaars werd evenzeer afgestooten.

Deze proeven werden door Schellbach op verschillende wijzen herhaald; wij zullen ze evenwel voorloopig laten rusten, daar de omstandigheden hier veel ingewikkelder zijn dan in gevallen, waar de luchttrillingen oorzaak zijn dat vaste ligchamen zich in een bepaalde rigting bewegen. Deze laatsten worden door een trillend voorwerp steeds aangetrokken, zooals Schellbach ook aantoonde; vlierpitballen, aan draden opgehangen, werden zoowel door stemvorken als door trillende platen aangetrokken. De boven reeds genoemde klankbodem trok metalen plaatjes en bollen, zelfs tot een gewigt van 120 gram en op een afstand van acht centimeters, duidelijk aan.

Een glazen buis, 64 centimeters lang, werd horizontaal bevestigd. Als nu een stemvork van 512 trillingen (de overeenkomstige golflengte was dus nagenoeg gelijk aan de lengte der buis) aan het eene uiteinde der buis in trilling gebragt werd, werd een ligte glazen bol of een schijfje aan het andere uiteinde sterk aangetrokken. De schijfjes en bollen, waarmede de proeven genomen werden, waren aan het einde van een ongeveer twee decimeters lange koperen naald vastgemaakt; deze naald was in het midden van een agaten hoedje voorzien en even als een magneetnaald om een horizontale as draaibaar gemaakt. Een gewone kleine magneetnaald, die aan de eene pool een schijfje papier van 4 centimeters middellijn draagt, wordt duidelijk door een trillende stemvork aangetrokken op een afstand van meer dan een decimeter. — De volgende proef van Schellbach is merkwaardig, omdat zij, naar ik meen, geheel analoog is aan een van de voornaamste proeven van Guthrie en beiden zich gemakkelijk door de theorie van Challis laten verklaren: Twee dunne glazen platen, 2 decim. lang en 15 centim. breed, waren op twee blokjes vastgemaakt en in het zelfde vertikale vlak gebragt, zoodat er een vertikale spleet van 15 millim. breedte tusschen beiden open bleef. Op een afstand van een decimeter van de glazen platen was de boven gebruikte klankbodem geplaatst, met het vlak van zijn opening evenwijdig aan de platen. Werd nu een stukje kaartpapier tusschen den klankbodem en de spleet gebragt, en wel in de onmiddellijke nabijheid van de laatste, van 5 tot 8 millim. er van verwijderd, dan werd dat stukje papier, nadat de stemvork in trilling was gebragt, niet tot den klankbodem aangetrokken, maar er van afgestooten en dus tegen de spleet aangedrukt. Was het stukje papier aan den van de stemvork afgekeerden kant van de spleet opgehangen, dan werd het, zooals in het gewone geval, aangetrokken. In beide gevallen dus beweegt het papier zich naar de spleet toe.

Schellbach heeft tot nu toe geen nieuwe onderzoekingen bekend gemaakt.

Guthrie heeft zijn proeven, op ons onderwerp betrekking hebbende, beschreven in de "Proceedings of the Royal Society of London" (vol. XIX), en er later een meer systematisch geordend verslag van gegeven in het "Philosophical Magazine" Nov. 1870.

Hij stelde zich, ter verklaring van de door hem gedane waarneming van het aantrekkend vermogen eener stemvork, het volgende ten doel: experimenteel vast te stellen, of luchtstroomingen dan wel verschillen in de digtheid van de de stemvork omringende lucht die aantrekking veroorzaakten. Dat het eerste mogelijk is bewijst de bekende proef van Clément, bij welke twee evenwijdige schijven tot elkander gedreven worden door een aanhoudenden luchtstroom, die van de gemeenschappelijke as naar den omtrek gaat, en even zoo het door Savart en Faraday bestudeerde verschijnsel, dat een zeer ligt en fijn poeder, op een trillende plaat gestrooid, zich niet op de knooplijnen ophoopt, maar op de punten waar de beweging het sterkst is. Volgens de algemeen aangenomen verklaring van Faraday is dit toe te schrijven aan kleine wervelwinden, die door de trilling van de plaat ontstaan; het ligte poeder kan niet uit die kleine cyklonen ontsnappen, hoewel zwaardere korrels er gemakkelijk door heen gedreven worden. Met het oog op deze beide feiten wilde Guthrie onderzoeken, of door de trillingen van de stemvork, hetzij permanente voortgaande (niet in zich zelven geslotene) luchtstroomingen of cyclonen ontstaan, en, zoo een van deze beide vooronderstellingen mogt blijken waar te zijn, of die stroomingen dan in staat zijn om de waargenomen aantrekking te weeg te brengen. De proeven door Guthrie genomen om het eerste punt uit te maken, en waaruit hij besluit tot de afwezigheid van een aanhoudenden niet in zich zelf terugkeerenden luchtstroom, komen mij voor niet zeer afdoende te zijn, hetgeen toe te schrijven is aan zijn onbekendheid met het feit, dat massa's van geringere densiteit dan de dampkringslucht in sommige gevallen door de trillende stemvork worden afgestooten, zooals uit de proeven van Schellbach blijkt. Hij brengt namelijk een opstijgend rookzuiltje zeer digt in de nabijheid van een stemvork, en als dit even rustig blijft opstijgen nadat de vork in trilling is gebragt, maakt hij daaruit de gezegde gevolgtrekking op. Ware de proef anders uitgevallen en de rookkolom afgestooten geworden, zooals Schellbach dit onder dergelijke omstandigheden waarnam, dan zou dat hem nog niet het regt gegeven hebben om tot het bestaan van een luchtstroom te besluiten, evenmin als men uit het feit dat een stukje papier door de trillende vork wordt aangetrokken, zonder meer, mag opmaken dat er een luchtstroom naar de vork toegaat. Hiermede vervalt dus, zooals ik meen, de bewijskracht der proef. De tweede proef, met hetzelfde doel gedaan, zouden wij met stilzwijgen kunnen voorbijgaan, daar zij niet veel van de eerste verschilt en aan hetzelfde euvel mank gaat. De invloed van een trillende stemvork wordt bij haar wederom beproefd op rook, die ditmaal niet in een zuil opstijgt, maar in een horizontale buis besloten is; de buis heeft het eene, geheel geopende, einde naar de vork toegekeerd; het andere uiteinde loopt in een nauwer buisje uit. Ook hier is het resultaat weder negatief. Bij een derde proef wordt dezelfde buis gebruikt, met deze wijziging, dat het nauwere buisje vervangen is door een vlakke zeepblaas, die het van de stemvork afgekeerde einde der buis sluit; deze wordt door de trillingen van de vork niet bol gemaakt, waaruit dan wederom door Guthrie wordt besloten tot het niet aanwezig zijn van luchtstroomingen. Maar daar verschillen in de drukking der lucht buiten en binnen de buis op de blaas denzelfden invloed zouden kunnen hebben als luchtstroomingen, of de werking van deze laatsten, zoo zij er mogten zijn, zouden kunnen opheffen, bewijst deze proef even weinig als de vorigen. Dat evenwel de aantrekkingsverschijnselen niet het gevolg kunnen zijn van voortgaande luchtstroomen, blijkt uit de proeven van Schellbach met de van een klankbodem voorziene stemvork. Een blaadje papier voor den mond van dien klankbodem gehangen, wordt altijd aangetrokken, voor welk punt van de opening het zich ook moge bevinden. Was nu die aantrekking het gevolg van luchtstroomen, dan zou hieruit volgen dat overal lucht uit den klankbodem stroomde, en nergens naar binnen, of omgekeerd; wat ongerijmd is.

Het tweede punt dat Guthrie wenschte uit te maken, n. l. of in de nabijheid van de trillende stemvork cyklonen ontstaan, behoefde niet opzettelijk onderzocht te worden, daar Faraday op deze vraag reeds het bevestigend antwoord gegeven had, toen hij zocht naar de oorzaak van de internodale ophoopingen van fijn poeder op trillende platen, en bij die gelegenheid ook met stemvorken en poeders proeven deed. Evenwel bleef het onuitgemaakt of die cyklonen zich tot zulke betrekkelijk groote afstanden van de stemvork uitstrekken als waarop zich de aantrekkingsverschijnselen nog duidelijk vertoonen; daarenboven was het zeer mogelijk dat die wervelwinden gewijzigd werden wanneer zij ontstonden in de onmiddellijke nabijheid van een vast ligchaam; en daar de aantrekking op een vast ligchaam in de nabijheid van de stemvork wordt uitgeoefend, vond Guthrie proeven in die rigting noodzakelijk.

Te dien einde bediende hij zich van een zeer ligt poeder (carbonas magnesii), dat hij op een gladde oppervlakte strooide, en op verschillende wijzen aan den invloed van een trillende stemvork onderwierp. Hij ging uit van de vooronderstelling, dat de wijze waarop het poeder zich onder dien invloed zal schikken van twee omstandigheden afhangt: ten eerste van de cyklonen aan de oppervlakte van de stemvork, en in de tweede plaats van de ligging der knooplijnen van de plaat, die door inductie meêtrilt. Om van de laatsten onafhankelijk te zijn strooide hij bij zijn eerste proeven het poeder op een aanbeeld met een gladde oppervlakte; maar toen het bleek dat het poeder zich daarop eveneens schikte als op een glasplaat, gebruikte hij verder de laatste. De stemvork werd nu in trilling gebragt en daarna in verschillende standen tot de plaat genaderd; het bleek, dat zij in al die standen tot op zeer weinig millimeters boven de plaat naderen moest om het poeder in beweging te brengen; als die beweging tot stand kwam, was zij van dien aard dat zij zich niet anders als door wervelstroomingen liet verklaren. Hieruit trok Guthrie het besluit, dat de cyklonen slechts in de onmiddellijke nabijheid van de stemvork ontstaan, en dus niet de oorzaak kunnen zijn van de aantrekkingsverschijnselen door deze te weeg gebragt, daar die zich op veel grooter afstand openbaren.

Er blijft dus niets anders over, dan aan te nemen dat door de trillingen van de stemvork veranderingen in de gemiddelde drukking der lucht worden te weeg gebragt, die, van punt tot punt verschillende, de waargenomen bewegingen van vaste ligchamen ten gevolge hebben.

Dat die wijziging van de gemiddelde drukking werkelijk door de aangewezen oorzaak kan plaats hebben, toont Guthrie door een zeer fraaije proef aan.

Een stemvork was op haar klankbodem vertikaal bevestigd; een van haar tanden was in een glazen buis van vier decimeter lengte en vier centimeter inwendigen diameter ingesloten; het onderste uiteinde van de buis was gesloten met een kurk, waardoor de tand heengestoken was; aan het andere uiteinde was door middel van een tweede kurk een dubbelgebogen buis van drie millimeter inwendigen diameter bevestigd, welker vertikaal naar beneden gebogen einde in een bakje met water stak. De verschillende verbindingen waren met was luchtdigt gemaakt, en, door de wijde buis een weinig te verwarmen, was er eenige lucht uitgedreven, zoodat het water in de nauwe buis eenigzins gestegen was. Zoodra nu de vrije tand werd aangestreken en daardoor ook de andere in trilling gebragt, daalde het water in de dunne buis tot drie millimeters toe, en toonde dus een vermeerdering van luchtdrukking in het einde van die buis aan. Die vermeerdering van drukking duurde zoolang als de vork trilde, en hield plotseling op wanneer de trillingen gestuit werden, zoodat zij geen gevolg van verwarming der lucht kon zijn.

Guthrie verklaart zijn proef op de volgende wijze: "De trillingen van een vast ligchaam in een gasvormig medium hebben op dit laatste een dergelijke uitwerking als zou te weeg gebragt worden door een uitzetting van het ligchaam, n. l. een verplaatsing van het medium. Indien de lucht volkomen veêrkrachtig was en geen inertie bezat, zou zulk een totale verplaatsing niet kunnen plaats grijpen."

Deze bewering geloof ik niet dat zoo gereedelijk behoeft te worden toegestemd. Want zij berust op de overweging dat, wanneer door de een of andere oorzaak de drukking in een punt van een opgesloten luchtmassa vermeerdert, die drukking in alle punten van die massa een even groote vermeerdering heeft moeten ondergaan, daar anders geen evenwigt mogelijk is. Zulk een vermeerdering van drukking kan slechts ontstaan door verhooging van temperatuur of vermindering van volumen. Daar in het hier behandelde geval de eerste oorzaak vervalt, kan slechts vermindering van volumen het waargenomen verschijnsel te weeg brengen; en dus moet wel aangenomen worden dat de trillingen van de stemvork de lucht verplaatsen, evenals zij dit de deelen van een taaije vloeistof zouden doen. Welke rol evenwel de onvolkomen inertie hierbij vervult, is mij niet duidelijk geworden.

De geheele redenering steunt dus op de stelling, dat in een afgesloten luchtmassa de drukking in alle punten dezelfde moet zijn. Bij een toestand van rust is hiertegen niets in te brengen; maar à priori is het niet te beslissen of ook in een luchtmassa in beweging, en bepaaldelijk in een beweging waarbij de drukking met den tijd veranderlijk is, de gemiddelde drukking in alle punten dezelfde zal blijven. Is dat niet het geval, dan ligt er niets tegenstrijdigs in de voorstelling dat, zelfs bij volkomen elasticiteit en bewegelijkheid, de drukking gedurende de beweging in het eene punt grooter en in een ander kleiner dan de normale is; dit zou dan de beschreven proef mogelijkerwijze even goed kunnen verklaren, en het vervolg zal doen zien dat die verklaring door de theorie geheel geregtvaardigd wordt. Maar er kan nog een bedenking in het midden gebragt worden tegen de verklaringswijze van Guthrie. De snelheid waarmede lucht in een vacuum stroomt is ongeveer 400 meter in de secunde; Guthrie beweert dat de maximumsnelheid van de deelen der stemvork niet bekend is, zoodat het onmogelijk is uit te maken in hoeverre de lucht in staat is hun beweging te volgen; maar mij dunkt dat men veilig mag aannemen dat bij een gewone stemvork de snelheid der uiteinden nooit in de verte een maximum bereikt van 400 meter of een dat er ook maar eenigzins nabij komt, zoodat tengevolge van de traagheid of de onvolkomen elasticiteit der lucht geen permanente verdunning in de nabijheid van de vork behoeft te ontstaan. Maar zelfs al neemt men aan dat er een verplaatsing geschiedt van denzelfden aard als door een uitzetting van het ligchaam zou te weeg gebragt worden, dan kunnen daardoor nog geen verschillen in de luchtdrukking van punt tot punt ontstaan, en deze zijn noodig om bij afwezigheid van stroomingen de aantrekkingsverschijnselen te verklaren.

En al geeft men dit punt toe, dan is er nog een bezwaar tegen het denkbeeld van Guthrie om de onvolkomene elasticiteit en de traagheid der lucht als de oorzaak van een luchtverdunning in de nabijheid van een trillend ligchaam aan te nemen, die, steeds minder wordende, zich tot op eenigen afstand van dat ligchaam zou uitstrekken en zoo het verschijnsel der aantrekking zou kunnen te weeg brengen. Dat bezwaar wordt aan zijn eigen proeven ontleend en bestaat in de wederkeerigheid van de aantrekking. Die wederkeerigheid toonde hij aldus aan: De stemvork was aan het einde van een staaf van een meter lengte vastgemaakt; aan het andere uiteinde van de staaf was een tegenwigt bevestigd, en het geheel aan een zijden draad opgehangen. De vork werd in trilling gebragt, en een stuk kaartpapier van vijf centimeters in het vierkant digt bij haar gebragt: de vork naderde steeds het stuk papier; maar tengevolge van de groote massa van het geheele opgehangen systeem, was de beweging veel langzamer en minder in het oog vallend, dan in het geval dat het papier bewegelijk opgehangen was.

Uit deze proef volgt, dat de aanwezigheid van een ligchaam, dat de trillingen terugkaatst, invloed uitoefent op de verdeeling der luchtdrukking in de nabijheid van de stemvork, en wel zoo, dat de drukking aan den van het ligchaam afgekeerden kant grooter is dan aan den tegenovergestelden. Nu kan men zich de werking van zulk een ligchaam zoo voorstellen, alsof er van ieder punt van zijn oppervlak nieuwe geluidgolven uitgaan; en wanneer verandering in de gemiddelde luchtdrukking een verschijnsel is, dat noodzakelijk met geluidgolven zamenhangt, dan kunnen die teruggekaatste golven die verdeeling van de drukking in de nabijheid van de stemvork in het leven roepen, en ligt er dus in de wederkeerigheid der aantrekking niets bevreemdends. Maar daar het ligchaam, dat die teruggekaatste golven doet ontstaan, zelf onbewegelijk blijft, kan hier niet gedacht worden aan luchtverdunning door onvolkomen elasticiteit en traagheid der lucht veroorzaakt, en dus is de wederkeerigheid daaruit niet te verklaren.

Het verdient opmerking dat bij de verklaringswijzen, die wij tot nog toe aangevoerd hebben, het aantrekkingsverschijnsel wordt beschouwd niet als een gevolg van de periodische luchtbeweging zelve, maar als een secundair verschijnsel dat door de beweging van een vast ligchaam in de lucht wordt te weeg gebragt. Zij zouden dus dadelijk blijken onjuist te zijn, wanneer het mogelijk was aan te toonen, dat een centrum van periodische luchtbeweging dat aantrekkend vermogen bezit, ook dan wanneer geen trillend vast ligchaam zich in dat centrum bevindt. Om dit te onderzoeken, heb ik getracht de volgende proef te nemen. Een stemvork van 256 trillingen werd geplaatst in het brandpunt van een brandspiegel; tegenover het brandpunt van een tweeden spiegel, die met zijn opening naar die van den eersten toegekeerd was, en wel zoo dat de assen van beiden te zamen vielen (de afstand tusschen de beide spiegels bedroeg ongeveer vier meters), bevond zich een blaadje aluminium van vijf centimeters in het vierkant; dit blaadje was bevestigd aan het uiteinde van een ongeveer twee decimeters lang, zeer ligt staafje, dat in het midden een agaten hoedje droeg, waarmede het op een vertikale as rustte en waarop het zich gemakkelijk bewegen kon; het andere uiteinde van het staafje was met een gewigtje bezwaard om het geheel in evenwigt te houden. Met dit toestelletje konden de aantrekkingsverschijnselen op de gewone wijze zeer fraai vertoond worden; het was nu zoo geplaatst, dat het blaadje loodregt op de as des spiegels stond en slechts weinige millimeters van het brandpunt verwijderd was. Indien nu werkelijk een punt waarvan luchttrillingen uitgaan een aantrekkend vermogen bezit, dan moest het blaadje aluminium tot het brandpunt van den spiegel aangetrokken worden, wanneer de stemvork, die zich in het andere brandpunt bevond, in trilling gebragt werd. Het bleek al spoedig, dat groote moeijelijkheden aan het gelukken der proef in den weg staan. Het was n. l. wel te verwachten, dat de uitwerking slechts zeer klein kon zijn, en de waarneming van zeer kleine regelmatige bewegingen van het blaadje werd bemoeijelijkt door de groote bewegelijkheid er van, die het zeer gevoelig maakte voor luchtstroomingen, zoodat het niet tot rust te brengen was. De trillingen van de stemvork (die ook bij directe inwerking op het plaatje dit slechts weinig, hoewel duidelijk aantrok) bleken dan ook te zwak te zijn om het verlangde uitwerksel te weeg te brengen. De stemvork werd toen door een tongenpijp van 256 trillingen vervangen, en niettegenstaande de waarneming door de voortdurende beweging van het blaadje zeer bemoeijelijkt werd, scheen het toch dat het een streven had om tot het brandpunt te naderen: wanneer de pijp werd aangeblazen op een oogenblik dat het blaadje zich naar het brandpunt toe bewoog, kreeg het plotseling een schok, waardoor zijn beweging versneld werd. Hoewel ditzelfde eenige malen door mij en nog twee waarnemers gezien werd (o. a. door den Heer Logeman, die zoo goed was mij tot het nemen der proef in staat te stellen), deel ik dit resultaat toch zeer onder voorbehoud mede; misschien gelukt het later, den lastigen invloed der luchtstroomen te overwinnen.

Uit deze proef wensch ik dus geenerlei besluit te trekken en voer ze alleen ter opheldering van het gezegde aan. Trouwens uit het voorgaande is reeds voldoende gebleken, dat de tot nu toe aangevoerde verklaringswijzen door verschillende feiten wêersproken worden. Wij moeten dus ten slotte wel aannemen, dat de beweging der lucht zelve een toestand in het leven roept, waarbij de gemiddelde drukking niet in alle punten dezelfde blijft. En hiermede komen wij tot de verklaringswijze van Challis, die mij toeschijnt van alle aantrekkingsverschijnselen, die een gevolg zijn van luchttrillingen, volkomen natuurlijk rekenschap te geven.

Ook had Challis reeds, vóór de proeven van Schellbach en Guthrie tot zijn kennis gekomen waren, op hydrodynamische gronden beweerd, dat een trillend ligchaam ligte voorwerpen moest kunnen aantrekken. Hij sprak dit uit in een werk: "On the principles of mathematics and physics" en voegde er bij: "Het is wenschelijk dat deze gevolgtrekking, afgeleid uit erkende dynamische grondbeginselen, proefondervindelijk getoetst worde, door snelle luchttrillingen op een kleinen bol te laten inwerken. Hoewel in dit geval de werking slechts zeer klein kan zijn, zou het toch misschien, wanneer de zaak goed aangevat werd, gelukken ze te ontdekken."

In algemeene trekken is de beschouwing, waarop zijn theorie berust, deze:

Wanneer een luchtmassa door een periodisch veranderlijke kracht in beweging gebragt wordt, zoodat er een geluidgolf ontstaat, dan zal in het algemeen zulk een bewegingstoestand hiervan het gevolg zijn, waarbij de snelheid in ieder punt van de ruimte eveneens een periodische functie van den tijd is. De wetten der hydrodynamika, berustende op de eigenschappen van vloeistoffen en gassen, doen zien, hoe die snelheden zich in de massa voortplanten en van punt tot punt veranderen; tevens sluiten zij in zich, dat met die snelheden veranderingen in de drukking gepaard gaan, en bij gassen tevens verdigtingen en verdunningen. Nu ligt de vraag voor de hand, of, wanneer de snelheden gegeven zijn door een periodische functie van den tijd, de verdigtingen en verdunningen en de drukking ook door zulk een functie zullen bepaald worden, en of binnen het verloop van een periode (een trilling) de *gemiddelde* drukking gelijk zal zijn aan de drukking van de luchtmassa in haar evenwigtstoestand.

Het antwoord op deze vraag luidt alleen bevestigend bij een bijzondere onderstelling, namelijk dat de snelheden en verdigtingen zeer klein zijn. Het strenge antwoord is evenwel ontkennend; dus zelfs bij kleine snelheden en verdigtingen, zooals zij bij de geluidbeweging alleen voorkomen, behoeft de gemiddelde digtheid en drukking in ieder punt streng genomen niet gelijk aan de normale te zijn, hoewel zij er slechts weinig van afwijkt.

Door toepassing van de theorie vindt men b. v. bij een geluidgolf, die van een enkel punt uitgaat en waar dus het golffront een bolоppervlak is, de gemiddelde drukking steeds kleiner dan de normale dampkringsdrukking, zoodat het punt, waarvan de beweging uitgaat, de lucht als het ware voor zich uitdrijft; die gemiddelde drukking neemt met den afstand tot het centrum evenwel zeer snel toe en nadert zoo tot de normale drukking. Een voorwerp nu, in de golf geplaatst en klein genoeg om de uitbreiding van die golf niet merkelijk te hinderen, zal aan de naar het bewegingscentrum toegekeerde zijde een kleinere drukking ondervinden dan aan de tegenovergestelde, en dien ten gevolge naar dat centrum toegedreven worden.

In het algemeen blijkt, het dat de *gemiddelde* verdigting in een punt (in het vervolg zal van verdigting gesproken worden als van een grootheid die ook negatief zijn kan, zoodat verdunning evenzeer hieronder begrepen is) afhangt van de snelheden en periodische verdigtingen, die in dat punt heerschen. Een aangroeijing der snelheid heeft een vermindering der *gemiddelde* digtheid ten gevolge, en een toeneming der *periodische* verdigtingen gaat met een aangroeijing van diezelfde digtheid gepaard. Wordt nu de golf door een vasten wand in haar uitbreiding gestoord, dan is de snelheid van die luchtdeeltjes, die aan dien wand grenzen, aan nul gelijk, terwijl de periodische verdigtingen een groote waarde bereiken; het gevolg is dat de gemiddelde digtheid in de nabijheid van den wand grooter is dan de normale digtheid. Denken wij ons nu dat een klein gedeelte van dien wand bewegelijk is, dan zal aan de eene zijde van het bewegelijke stuk de gewone dampkringsdrukking heerschen, en aan de andere, naar het bewegingscentrum toegekeerde, een gemiddelde drukking die grooter dan deze is; en dien ten gevolge zal dat stuk een streven hebben om zich van het centrum te verwijderen. Hierdoor worden nu tegelijk twee proeven verklaard, die in de vorige bladzijden beschreven zijn: de proef van Schellbach met de spleet, en die van Guthrie met den manometer. Bij de eerste vormt de glazen plaat den vasten wand, en het stukje papier, dat juist voor de spleet hangt, is het bewegelijke stuk. Na het voorgaande is het duidelijk, waarom het papier naar de spleet toegedreven wordt wanneer het zich tusschen deze en de stemvork bevindt; is het aan de andere zijde van de platen opgehangen, dan kan men alle punten van de spleet als nieuwe centra van beweging beschouwen, even als men dit in de leer van het licht pleegt te doen. De golven die van die punten uitgaan worden door het kleine blaadje en hun uitbreiding weinig gehinderd, en dus wordt dit laatste ook in dit geval tot de spleet aangetrokken. De proef van Guthrie laat zich geheel op dezelfde wijze verklaren; de trillingen, door de stemvork opgewekt, planten zich door de beide buizen tot aan de oppervlakte van het waterzuiltje voort en worden daar gestuit; opvolgende verdigtingen en verdunningen blijven evenwel plaats hebben en, zooals gezegd is en in het vervolg bewezen zal worden, moet een verhoogde gemiddelde drukking daarvan het gevolg zijn, die zich door depressie van het zuiltje moet verraden, daar de drukking van buiten constant is.

Wanneer daarentegen in een punt de snelheden zeer groot zijn en de periodische verdigtingen klein, dan zal een verdunning van de lucht daarvan het gevolg zijn. Een voorbeeld daarvan zien wij aan den mond van den klankbodem eener stemvork en aan dien van een open orgelpijp. Het zou misschien niet onmogelijk zijn, hier die verdunning direct door middel van een manometer zigtbaar te maken. Het verschijnsel van het zuigen bij het uitstroomen van lucht uit een nauwe opening kan ook tot voorbeeld dienen van een luchtverdunning ontstaan door snelle luchtbeweging zonder verdigting of verdunning; de beweging is hier evenwel niet periodisch; in dit geval is de luchtverdunning zeer gemakkelijk door manometerproeven aan te toonen (Zie Müller's Physik, deel I pag. 253).

Tot nog toe is slechts gesproken van de aantrekkingsverschijnselen, die door luchttrillingen in het leven geroepen kunnen worden; maar er is reeds op gewezen, dat in sommige gevallen een ligchaam van het centrum van beweging wordt afgestooten. In alle gevallen waarin die afstooting werd waargenomen, had het afgestooten ligchaam een geringer specifiek gewigt dan de dampkringslucht. Eenigzins voorbarig evenwel komt het mij voor, met het oog op de weinige en onvolkomen waarnemingen die hierover bestaan, met Schellbach de stelling uit te spreken, dat door de trillingen van een medium alle ligchamen van een geringere densiteit dan het medium van het centrum van beweging worden afgestooten, en die van grootere densiteit aangetrokken. Te eerder mag deze stelling betwijfeld worden daar er reeds een waarneming bekend is van aantrekking uitgeoefend op een ligchaam van geringer specifiek gewigt dan de lucht. Deze waarneming is gedaan door Tatlock, die haar aldus beschrijft:

Een ligte collodionballon is met waterstof gevuld, en de draad, waarmede de opening gesloten is, is tot veertig duim (inches) verlengd. Aan het vrije uiteinde van den draad is een stuk hout gebonden om als drijver te dienen. Dit laatste wordt nu op de oppervlakte van water gelegd en dient om de ballon vast te houden, terwijl het te gelijker tijd vrijheid van beweging in alle rigtingen toelaat. Indien nu een blad tin (of beter nog een ligt houten bord met afgeronde kanten) vertikaal en op eenige duimen afstands van de ballon heen en weêr bewogen wordt, dan nadert de ballon de plaat, den drijver over de oppervlakte van het water met zich meêslepende. Tevens werden trillingen van de ballon opgemerkt, isochroon met die van de plaat.

Uit deze proef zou blijken, dat het aantal trillingen invloed uitoefent op het verschijnsel, daar Schellbach met een dergelijke ballon en een stemvork van 256 trillingen afstooting verkreeg. Ik kan niet ontkennen, dat ik in de theorie van Challis geen sleutel tot deze verschijnselen kan vinden, maar geloof toch ook niet dat zij er mede in tegenspraak zijn.

Men mag gerustelijk aannemen dat, indien het mogelijk ware een vast ligchaam te verkrijgen van een geringer specifiek gewigt dan de lucht, dit ligchaam door een trillende stemvork zou worden aangetrokken. Wanneer men zich toch het ligchaam onbewegelijk denkt en de stemvork als bewegelijk, dan zal de laatste, in trilling gebragt zijnde, door het ligchaam aangetrokken worden, daar er geen enkele reden bestaat waarom dat in dit geval minder zou plaats hebben dan in het geval dat men een ligchaam heeft van grooter densiteit dan de lucht. Denkt men zich nu omgekeerd de stemvork vast en het ligchaam bewegelijk, dan moet men wel aannemen dat .ook nu aantrekking zal plaats hebben, tenzij men de vreemde gevolgtrekking zou willen toelaten, dat bij bewegelijkheid van beiden het geheele systeem zich in een bepaalde rigting zou voortbewegen. Thomson merkt in een brief aan Guthrie bij een dergelijke conclusie op: "Men zou kunnen aanvoeren, dat deze consequentie niet onmogelijk is, daar het zou kunnen gebeuren dat de levendige kracht van de luchttrillingen zich langzamerhand omzette in een levendige kracht van translatie van de vaste massa. Maar het "gezond verstand" is reeds geneigd om zulk een argument te verwerpen, en daarenboven wordt de onhoudbaarheid er van aangetoond door de mathematische theorie, in het bijzonder de theorie van de momenten in de hydrodynamika, zooals die uiteengezet is in mijn verhandeling over vortex-beweging."

Het kan niet anders, of de trillingen van het in een ballon besloten ligte gas en de reactie van deze op de omringende lucht moeten van grooten invloed op het verschijnsel zijn; en daar deze weder afhankelijk zijn van den graad van elasticiteit en spanning van de membraan waaruit de ballon vervaardigd is, zijn hier de omstandigheden zoo zamengesteld, dat een mathematische theorie zich nog niet wel laat geven.

Deze laatste beschouwing is slechts dan van toepassing, wanneer het ligchaam groot genoeg is om niet in zijn geheel de luchttrillingen te volgen. Is het zoo klein dat het dit wel doet, dan moet het als een deeltje van de trillende luchtmassa beschouwd worden, en de rigting, waarin het zich ten gevolge van de luchttrillingen zal bewegen, is dan niet meer uitsluitend afhankelijk van de verdeeling der drukking in de omringende lucht. Immers juist die trillingen maken een toestand mogelijk, waarbij de gemiddelde drukking van punt tot punt verschilt, zonder dat er een luchtstroom ontstaat, die dat verschil tracht op te heffen.

In het geval dat wij op het oog hebben, bevinden zich de deeltjes van rookzuilen en vlammen, die volgens de proeven van Schellbach van het middelpunt van beweging afgestooten worden. Hier kunnen zeer goed andere oorzaken voor de afstooting bestaan, die in de beweging der deeltjes zelven gelegen zijn.

Tot opheldering hiervan moge dienen een uittreksel uit een brief van Thomson aan Guthrie (de brieven, die hier aangehaald zijn, komen voor in het "Philosophical Magazine" van Juni 1871); daar hij evenwel zijn meening niet door bewijzen staaft, deel ik ze mede zonder ze daarom tot de mijne te maken.

"Men denke zich in de eerste plaats een zeer klein deel van de vloeistof, (Thomson heeft bij zijn onderzoekingen steeds het oog op niet zamendrukbare fluida) dat, ten gevolge van de door den vibrator in de vloeistof onderhouden trillingen, zich heen en weêr beweegt. Laat het zoo klein zijn in al zijn afmetingen dat het, gedurende de periode van zijn beweging, geen merkbare verandering in gedaante ondergaat. Indien dit deel vast wordt, zal dat vast worden slechts oneindig weinig verandering brengen in zijn eigen beweging en in die van de vloeistof rondom. Indien nu door het aanbrengen van een kracht, die periodisch verandert volgens een eenvoudige periodische functie, het kleine ligchaam gedwongen wordt zich sneller of langzamer te bewegen dan de omringende vloeistof, dan zal er een bepaalde, standvastige gemiddelde kracht noodig zijn om het te verhinderen zijn gemiddelde plaats over te brengen naar punten waar grooter of kleiner beweging heerscht. Wanneer de toegevoegde kracht de natuurlijke trillingen van het ligchaampje vermeerdert, is de rigting, waarin het zich zal trachten te bewegen, van punten van grooter naar punten van geringer beweging; het omgekeerde heeft in het tegenovergestelde geval plaats.

Ten slotte: de gedachte toegevoegde vibratie wordt werkelijkheid, indien de densiteit van het ligchaampje grooter of kleiner is dan die van de vloeistof; in het eerste geval worden de natuurlijke trillingen verkleind, in het tweede geval vergroot. Hieruit volgt, dat een zeer klein ligchaam van een andere densiteit dan de omringende vloeistof zich zal trachten te bewegen naar punten van grooter of kleiner snelheid (met andere woorden naar den vibrator aangetrokken of van hem afgestooten zal worden) naarmate zijn digtheid grooter of kleiner dan die van de vloeistof is."

Men ziet hieruit, dat bij een ligchaam dat geheel of gedeeltelijk gasvormig is, in welk geval het als een deel van het trillende medium beschouwd kan worden, de beweging van nog geheel andere oorzaken afhankelijk kan zijn dan van verschillen in de drukking van het omringende medium, zoodat de afstooting, die bij ligchamen van geringere densiteit dan de lucht is opgemerkt, geen bewijs is tegen de theorie van Challis.

Wij zullen in het vervolg onderstellen, dat wij te doen hebben met ligchamen van grooter densiteit dan de dampkringslucht; van deze weten wij toch dat zij in alle gevallen tot een centrum van beweging worden aangetrokken, wanneer niets aan de vrije uitbreiding van den geluidgolf aanmerkelijk in den weg staat.

Onderzoeken wij thans de drukking van een medium waarin periodische beweging plaats heeft. Vóór dit onderzoek is het onvermijdelijk een overzigt te geven van de leer der beweging van gassen, daar het zich onmiddellijk aan die theorie aansluit.

II.

THEORIE DER BEWEGING VAN VLOEISTOFFEN EN GASSEN.

Het problema dat aan de hydrodynamika ten grondslag ligt en welks oplossing haar doel is, is het volgende:

Wanneer een begrensde of onbegrensde massa van een vloeistof of gas gegeven is, en men kent den bewegingstoestand van die massa op een bepaald tijdstip, benevens de krachten die op ieder oogenblik op de deelen dier massa werken, wordt gevraagd naar den bewegingstoestand op een willekeurig tijdstip.

Reeds dadelijk doet zich bij de studie van dit problema de vraag voor, hoe men den bewegingstoestand bepaald wil hebben. Dit kan namelijk op twee wijzen geschieden. In de eerste plaats kan men ieder deeltje afzonderlijk in het oog houden en dit gedurende de beweging volgen; de bewegingstoestand van zulk een deeltje wordt dan bepaald evenals die van een stoffelijk punt in de dynamika.

Men neme b. v. een regthoekig coördinatenstelsel aan en beschouwe het deeltje welks coördinaten bij het begin der beweging zijn: x_1, y_1 en z_1. Na den tijd t is het in het algemeen van plaats veranderd: noemen wij zijn coördinaten na dien tijd: $x_1 + \xi$, $y_1 + \eta$, $z_1 + \zeta$. De componenten der snelheid zijn dan:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \text{ en } \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Deze grootheden evenals ξ, η en ζ zijn functiën van x_1, y_1, z_1 en t.

Zijn deze functiën bekend, dan kent men ook den bewegingstoestand van de geheele massa; het spreekt van zelf dat in deze functiën nog constanten voorkomen, die door den aanvankelijken bewegingstoestand bepaald worden.

Is de vloeistof zamendrukbaar, dus een gas, dan dient ook nog de digtheid van ieder deeltje, die wij ρ zullen noemen, ter bepaling van den bewegingstoestand.

Gewoonlijk slaat men evenwel een anderen weg in, en volgt niet ieder deeltje van de massa gedurende de beweging, maar beschouwt de snelheden en digtheden, die in ieder punt van de ruimte heerschen.

De componenten der snelheid in het punt $(x\ y\ z)$ van de ruimte noemen wij u, v en w. Wij stellen ons dus voor, deze grootheden benevens ρ in functie van x, y en z te vinden.

Men ziet, dat bij deze wijze van beschouwen de verplaatsingen niet gevonden worden, en in zooverre is zij minder volledig dan de eerste methode; evenwel is het gemakkelijk in te zien, dat de grootte der verplaatsingen tot den eigenlijken bewegingstoestand niets afdoet.

Het is gemakkelijk om, wanneer een vraagstuk naar de eerste wijze van opvatting opgelost is, uit die oplossing een andere af te leiden, die de vraag in den tweeden zin beantwoordt. Men weet dan namelijk, dat op den tijd t in het punt $(x_1 + \xi_1, y_1 + \eta_1, z_1 + \zeta)$ de snelheid tot componenten heeft:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}, \frac{\partial\eta}{\partial t} \text{ en } \frac{\partial\zeta}{\partial t},$$

waarbij deze laatste grootheden functiën zijn van x_1, y_1, z_1 en t. Bedenkt men nu dat men ook ξ, η en ζ als functiën van x_1, y_1, z_1 en t kent, en stelt men

$$x_1 + \xi = x, y_1 + \eta = y \text{ en } z_1 + \zeta = z$$

dan kan men x_1 y_1 en z_1 en daarna $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ en $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ in x, y, z en t uitdrukken. Deze laatste grootheden, op die wijze uitgedrukt, zijn nu niets anders als de grootheden, die wij u, v en w genoemd hebben, en hebben betrekking op het punt $(x\ y\ z)$; zij zijn m. a. w. de componenten van de snelheid in een willekeurig punt van de ruimte.

Zoeken wij nu de algemeene bewegingsvergelijkingen der vloeistoffen. Wij moeten daarbij natuurlijk, behalve van het beginsel van d'Alembert, dat ook hier onmisbaar is, gebruik maken van een kenmerkende eigenschap van vloeistoffen en gassen.

De eigenschap, die hier in aanmerking komt, is deze:

De drukking in een vloeistof (of gas) is in een punt naar alle rigtingen dezelfde. Voor het evenwigt is deze wet experimenteel bewezen; of zij ook bij de beweging geldt, weet men niet, maar onderstelt het ook dan. De drukking wordt herleid tot de eenheid van oppervlakte. De aangehaalde wet kan dus op deze wijze vertolkt worden: Men denke zich door een punt van de vloeistofmassa een vlakte-element gelegd; de deelen van de vloeistof, die door dat element gescheiden zijn, oefenen een drukking op elkander uit in een rigting loodregt op het element; de grootte van die drukking, gedeeld door de oppervlakte van het element, is onafhankelijk van de rigting van dit laatste.

Heeft men met een gas te doen, dan moet, behalve van deze wet, nog gebruik gemaakt worden van de betrekking, die tusschen digtheid en drukking bestaat.

Noemen wij nu de drukking in het punt $(x\,y\,z)$ p, en de componenten van de uitwendige krachten, die in dat punt op de eenheid van massa werken (die eenheid in het punt geconcentreerd gedacht) X, Y en Z, en stellen wij de bewegingsvergelijking op voor een deel der vloeistof, dat de gedaante heeft van een regthoekig paralellopipedon met de zijden dx, dy en dz. Het hoekpunt, dat het digtst bij den oorsprong der coördinaten ligt, zij het punt $(x\,y\,z)$. De krachten, die in de rigting van de positieve x-as op dit paralellopipedon werken, zijn:

1⁰ de kracht $\rho\, X\, dx\, dy\, dz$.

2⁰ $p\, dy\, dz$, d. i. de drukking op het zijvlak, dat evenwijdig aan het vlak YZ is en door het punt $(x\,y\,z)$ gaat, en

$3^0 — (p + \frac{\delta p}{\delta x} dx)\, dy\, dz$, d. i. de drukking door de vloeistof op het tegenovergestelde zijvlak uitgeoefend.

De totale bewegende kracht in de rigting van de positieve x-as is dus:

$$\left[\rho\, X - \frac{\delta p}{\delta x}\right] dx\, dy\, dz.$$

Dan is volgens het principe van d'Alembert:

$$\rho\, \frac{d^2\xi}{dt^2}\, dx\, dy\, dz = \left(\rho\, X - \frac{\delta p}{\delta x}\right) dx\, dy\, dz.$$

of
$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} = X - \frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Evenzoo heeft men in de rigting van de beide andere assen:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} = Y - \frac{d^2\eta}{dt^2} \text{ en } \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} = Z - \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Tot nu toe hebben wij de eerste beschouwingswijze van den bewegingstoestand moeten volgen, en de vergelijkingen voor de versnelling van het paralellopipedon gevonden voor den stand, waarin het zich op een bepaald oogenblik bevindt; het hebbe in dien stand een snelheid, waarvan de componenten zijn u, v en w. Daar wij nu niet de vergelijkingen zoeken van de aangroeijingen der snelheid van het paralellopipedon, welks plaats in de ruimte veranderlijk is, maar van de snelheid in het vaste punt $(x\, y\, z)$, moeten wij een betrekking trachten te vinden tusschen $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ en $\frac{\delta u}{\delta t}$, $\frac{\delta v}{\delta t}$, $\frac{\delta w}{\delta t}$.

Merken wij daartoe op, dat op het oogenblik dat wij beschouwen u, v en w tezamenvallen met $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ en $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, alleen met dit onderscheid, dat wij ons de eersten uitgedrukt denken in x, y, z en t en de tweeden in x_1, y_1, z_1 en t, waarbij x_1, y_1, z_1 de oorspronkelijke coördinaten van het punt zijn, dat zich nu in $(x\,y\,z)$ bevindt; x_1, y_1, z_1 zijn natuurlijk van t onafhankelijk.

De eerste en tweede differentiaalquotienten van ξ, η en ζ ten opzigte van t, in den zin waarin zij hierboven gebruikt zijn, duiden een totale differentiatie aan, bij welke ξ, η en ζ als functiën van x_1, y_1, z_1 en t gedacht worden, terwijl x_1, y_1 en z_1 standvastige grootheden zijn.

Worden nu de eerste differentiaalquotienten als functiën van x, y, z en t geschreven, dan zijn bij een tweede differentiatie ook x, y en z als functiën van t te beschouwen, en men heeft:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial \frac{\partial \xi}{\partial t}}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\partial \xi}{\partial t}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \frac{\partial \xi}{\partial t}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \frac{\partial \xi}{\partial t}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

of:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

en evenzoo:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Brengen wij deze waarden in onze bewegingsvergelijkingen over, dan worden deze:

$$
(1)\quad \begin{cases}
\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X - \dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} - w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y - \dfrac{\partial v}{\partial t} - u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial v}{\partial y} - w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = Z - \dfrac{\partial w}{\partial t} - u\dfrac{\partial w}{\partial x} - v\dfrac{\partial w}{\partial y} - w\dfrac{\partial w}{\partial z}.
\end{cases}
$$

Een vierde vergelijking vinden wij door een zuiver meetkundige beschouwing. Beschouwt men een geheel begrensd deel van de ruimte, dan zal op ieder oogenblik vloeistof dit deel binnentreden en evenzoo er uitgaan. Is de vloeistof niet zamendrukbaar, dan mag de hoeveelheid vloeistof, die zich binnen de begrenzing bevindt, daardoor noch vermeerderen noch verminderen; is het een gas, dan heeft vermeerdering of vermindering in het algemeen wel plaats, maar gaat gepaard met een daarvan afhankelijke verandering in de digtheid van den inhoud; beide gevallen kunnen in een enkele vergelijking zamengevat worden.

Het vlakte-element $d\omega$ ligge ergens binnen de vloeistof; de deeltjes, die in de onmiddellijke nabijheid van dat vlakte-element liggen, hebben eene snelheid s, waarvan de rigting een hoek ϑ met de normale op het element moge maken. Het volumen van de hoeveelheid vloeistof, die in den tijd dt het vlakte-element doorgaat, is gelijk aan dat van een cylinder met de bazis $d\omega$, en de hoogte $s \cos \vartheta \, dt$; dus die hoeveelheid zelve is gelijk aan:

$$\rho\ s \cos \vartheta\ dt\ d\omega$$

en men ziet dat $s \cos \vartheta$ de projectie van de snelheid op de normale van het vlakte-element is.

Denken wij ons nu weder in de ruimte, die door de vloeistof wordt ingenomen, een regthoekig paralellopipedon met de zijden dx, dy en dz evenwijdig aan de coördinatenassen, en zoeken wij de hoeveelheid vloeistof, die in den tijd dt dat paralellopipedon binnenstroomt. Het hoekpunt, dat het digtst bij den oorsprong der coördinaten ligt, zij wederom het punt $(x\, y\, z)$. Dan volgt uit het bovenstaande, dat de hoeveelheid vloeistof, die door dat zijvlak $dy\ dz$ naar binnen stroomt, dat door het punt $(x\, y\, z)$ gaat, gelijk is aan: $\rho\ u\ dy\ dz\ dt$; door het tegenovergestelde zijvlak stroomt een hoeveelheid naar binnen, die gelijk is aan:

$-\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x}\, dx\right) dy\ dz\ dt$, hetgeen een vermeerdering van de vloeistof binnen het paralellopipedon geeft van $-\frac{\partial \rho u}{\partial x}\, dx\ dy\ dz\ dt$. Voor de vermeerdering van vloeistof ten gevolge van het binnenstroomen door de andere zijvlakken, vindt men analoge uitdrukkingen, en dus is de totale vermeerdering in den tijd dt:

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dx\ dy\ dz\ dt.$$

Een andere uitdrukking voor dezelfde vermeerdering vindt men door de aangroeijing der digtheid binnen het paralellopipedon in den tijd dt met het volumen van dit laatste te vermenigvuldigen; die uitdrukking is dus:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Beide uitdrukkingen aan elkander gelijkgesteld geven de betrekking:

$$(2) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0.$$

Dit is de zoogenaamde continuiteits-vergelijking; zij kan voor een niet zamendrukbare vloeistof, bij welke dus ρ constant is, vereenvoudigd worden, en gaat dan over in:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Wij hebben nu het vereischte aantal vergelijkingen om u, v, w, p en ρ te bepalen, daar wij, zooals reeds is opgemerkt, nog een vergelijking hebben, die voor zamendrukbare vloeistoffen de betrekking tusschen de digtheid en de drukking geeft.

In het algemeen is dus het gestelde probleem opgelost; de onderscheidene gevallen die kunnen voorkomen zijn alleen verschillend in den aard van de begrenzing en den aanvankelijken bewegingstoestand, die bij hen ondersteld wordt. Slechts in zeer weinig gevallen is een volledige oplossing mogelijk, wegens de analytische moeijelijkheden, aan de behandeling der hier voorkomende partieele differentiaal-vergelijkingen verbonden. Men maakt ze dan ook gewoonlijk eenigzins handelbaarder door een bijzondere onderstelling, die in de werkelijkheid dikwijls geoorloofd is.

Zij heeft ten doel de drie vergelijkingen (1) tot één zamen te trekken; men bereikt dit door aan te nemen dat X, Y

en Z de partieele differentiaalquotienten naar x, y en z van een functie V zijn; deze onderstelling heeft zeer weinig beperkends, daar alle in de natuur voorkomende krachten aan die voorwaarde voldoen; daarenboven neemt men aan, dat de componenten der snelheid, u, v en w, evenzeer door de partieele differentiaalquotienten van een zelfde functie φ kunnen voorgesteld worden. Vermenigvuldigt men, dit voorop gesteld zijnde, de drie vergelijkingen (1) naar volgorde met dx, dy en dz, en telt ze dan bij elkander op, dan vindt men voor de som:

$$\frac{dp}{\rho} = dV - d\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\, d\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Bij alle in deze formule voorkomende totale differentialen is t standvastig ondersteld. De vergelijking kan gëintregeerd worden en geeft dan:

$$(3)\quad \int\frac{dp}{\rho} = V - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + T.$$

T is een functie, die onafhankelijk van x y en z is, maar afhankelijk van t zijn kan.

Te zamen met de continuiteitsvergelijking (2) en de betrekking tusschen p en ρ, bepaalt (3) de onbekende functiën φ, p en ρ.

De onderstelling, die wij met betrekking tot u, v en w gemaakt hebben, schijnt zeer willekeurig te zijn, maar is in de werkelijkheid dikwijls van toepassing. Dit volgt reeds uit de volgende stelling, die van Lagrange afkomstig is.

De differentiaal-uitdrukking $udx + vdy + wdz$ is een volledig differentiaal gedurende het geheele verloop der beweging, wanneer zij het voor een enkel tijdstip is.

Alvorens deze stelling te bewijzen, zij het mij vergund, in navolging van Stokes, er de meetkundige beteekenis van te doen zien.

Men denke zich om een onwillekeurig punt van de ruimte, die door de vloeistof wordt ingenomen, met een willekeurigen straal een boloppervlak beschreven; die deeltjes, die zich op een gegeven oogenblik binnen dat boloppervlak bevinden, hebben zekere snelheden, die zich naar de methode van Poinsot als krachten laten behandelen; men kan ze tot een resultante zamenstellen, die haar aangrijpingspunt in het centrum van den bol heeft, en een koppel.

De componenten der snelheid in ieder punt zijn wederom u, v en w. Wanneer nu de beweging van dien aard is, dat het op die wijze verkregen koppel altijd aan nul gelijk is, welk punt van de ruimte men ook als middelpunt van den bol moge beschouwen, dan is de uitdrukking $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ een volledig differentiaal; en omgekeerd, zijn u, v en w partieele differentiaalquotienten van een zelfde functie, dan zijn alle koppels, die men op de aangegeven wijze verkrijgt, nul. Men houde in het oog, dat op de wijze van krachten worden zamengesteld de producten van de snelheden met de volumen-elementen, die die snelheden hebben, en niet met de massa-elementen; m. a. w., men moet zich den inhoud van den bol homogeen denken met een densiteit gelijk aan de eenheid.

Dus bij vloeistoffen vallen beide soorten van koppels te zamen, of zijn ten minste slechts door een constanten factor onderscheiden. Hetzelfde heeft plaats bij gassen, wanneer men den straal van den bol oneindig klein neemt. In dat geval is ook het resulterende koppel oneindig klein, en het verschil van de waarden van beide soorten van koppels is een oneindig klein van hoogere orde, dat verwaarloosd mag worden.

Om het eerste gedeelte der stelling te bewijzen, kiezen wij het middenpunt van den bol tot oorsprong van coördinaten en nemen den straal oneindig klein, zoodat wij voor alle punten binnen den bol mogen stellen:

$$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z$$

$$v = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z$$

$$w = w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 z.$$

De index 0 duidt van de grootheden, die er mede voorzien zijn, de waarde in het middelpunt aan.

Volgens de gebruikelijke notatie noemen wij de componenten van het resulterende koppel L, M en N, en wij hebben vooreerst voor L:

$$L = \int (yw - zv)\, dk.$$

Het integraal strekt zich over den geheelen inhoud van den bol uit.

Schrijft men hierin voor v en w de bovenstaande uitdrukkingen, dan kan de integratie uitgevoerd worden, en men vindt wegens:

$\int y \, dk = \int z \, dk = 0$ en

$\int xy \, dk = \int yz \, dk = \int xz \, dk = 0$ en

$\int y^2 dk = \int z^2 dk = \frac{1}{2}$ (Moment van inertie $= A$).

$$L = \frac{1}{2} A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0\right].$$

Op dezelfde wijze verkrijgt men voor de overige koppels

$$M = \frac{1}{2} A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0\right]$$

$$N = \frac{1}{2} A \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]$$

Deze uitdrukkingen kunnen niet nul zijn, tenzij in het middelpunt voldaan is aan de voorwaarde die $udx + vdy + wdz$ tot een volledig differentiaal maakt; en daar het middelpunt willekeurig gekozen is, volgt hieruit het gestelde.

Is omgekeerd: $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, dan zijn de uitdrukkingen, die wij L M en N genoemd hebben, nul voor iederen bol die in de vloeistof of het gas gedacht kan worden; bij het bewijs dezer stelling behoeft de straal van den bol niet oneindig klein te zijn.

Wij kiezen het middelpunt van den bol weder tot oorsprong der coördinaten, en voeren poolcoördinaten in door middel van de substitutiën:

$$x = r \cos \vartheta, \; y = r \sin \vartheta \cos \psi, \; z = r \sin \vartheta \sin \psi;$$

dan gaat de uitdrukking $L = \int \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dk$ over in:

$$L = \iiint \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\psi = \iint \left[r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} d\psi \right]$$

Maar $\int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \, d\psi = 0$

voor alle waarden van r en ϑ; dus is:

$$L = o.$$

Evenzoo bewijst men dat $M = o$ en $N = o$ [1].

Wij kunnen nu overgaan tot het bewijzen der hoofdstelling, dat n. l. $udx + vdy + wdz$ een totaal differentiaal zal blijven, wanneer deze uitdrukking het voor een enkel oogenblik der beweging is. Hiertoe is het voldoende aan te toonen, dat, indien het gestelde waar is voor den tijd t_1, het nog waar zal zijn voor den tijd $t_1 + dt$.

Merken wij vooreerst op, dat, daar de componenten der uitwendige krachten zelven partieele differentiaalquotienten van eenzelfde functie zijn, de veranderingen, die zij in de componenten der snelheid veroorzaken, eveneens partieele differentiaalquotienten van eenzelfde functie zijn, en zij dus niet kunnen te weeg brengen dat de uitdrukking $udx + vdy + wdz$ ophoudt een volledig differentiaal te zijn.

Denken wij ons nu een van de boloppervlakken die wij reeds gebruikt hebben, en wel weder een met een oneindig kleinen straal; en nemen wij aan dat het resulterende kop-

---

[1] Deze bewijzen zijn gevolgd naar Thomson, die ze geeft in zijn verhandeling on Vortex-motion. (Transactions of the Royal Society of Edinburgh). Oorspronkelijk zijn zij van Stokes.

pel op een gegeven oogenblik gelijk aan nul is; kunnen wij nu bewijzen dat dat koppel op een volgend oogenblik der beweging nog nul zal zijn, dan is daarmede ook de stelling bewezen; aan de algemeenheid van het bewijs wordt daarenboven niet te kort gedaan door de omstandigheid dat wij den straal van den bol oneindig klein onderstellen; want blijft het koppel voor zulk een bol nul, dan blijft daarmede $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ een volledig differentiaal in het middelpunt van dien bol; hieruit volgt, dat hetzelfde voor een willekeurig punt plaats heeft, en dan blijft ook het koppel nul voor iederen willekeurigen bol, zooals uit het tweede gedeelte der hulpstelling blijkt.

Het resulterende koppel van den inhoud van het bolopppervlak kan door twee oorzaken veranderen: 1°. door de drukking, die er door de omringende vloeistof op wordt uitgeoefend, en 2°. doordat deeltjes den bol verlaten en anderen er in stroomen; door de reeds bestaande beweging kan het koppel, volgens de stelling van het behoud der koppels, niet veranderen.

De eerste oorzaak geeft in ons geval geen verandering, daar de drukking overal normaal en dus naar het middelpunt van den bol gerigt is. Wij hebben dus slechts het moment te zoeken van de deeltjes, die in den tijd dt naar binnen stroomen; (het moment van die, welke den bol verlaten, wordt, zooals van zelf spreekt, als negatief in rekening gebragt.)

De projectie van de snelheid in het punt (xyz) van het boloppervlak op de inwendige normale is:

$$-\frac{ux + vy + wz}{r}$$

dus het volumen van de hoeveelheid vloeistof, die in den tijd dt door het element $d\omega$ in dat punt naar binnen stroomt, is:

$$-\frac{ux + vy + wz}{r}\, d\omega\, dt.$$

Het moment van die hoeveelheid ten opzigte van de z as is dus:

$$\frac{1}{r}\,(u y - v x)\,(u x + v y + w z).\; d\omega\, dt.$$

De totale aangroeijing van het moment om de z as in den tijd dt is dus:

$$\frac{dt}{r}\int (u y - v x)\,(u x + v y + w z)\; d\omega,$$

en is de stelling die wij uitgesproken hebben waar, dan moet het bovenstaande integraal, over het geheele boloppervlak uitgestrekt, verdwijnen.

Wij hebben weder:

$$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z$$

$$v = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z$$

$$w = w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 z.$$

Worden deze waarden in het integraal gesubstitueerd, dan kan de integratie uitgevoerd worden; men doet dit gemakkelijker door reeds dadelijk op te merken, dat alle termen verdwijnen, waarin een of meer der veranderlijken tot een onevene magt voorkomen.

Zoo is b. v. $\int x^2\, yz\, d\omega = o$.

Voor het integraal kunnen wij schrijven:

$$\int (u^2 - v^2)\, xy\, d\omega - \int uv\, (x^2 - y^2)\, d\omega + \int wz\, (uy - vx)\, d\omega.$$

Met behulp van bovenstaande opmerking en van eenige gelijkheden, die van zelf in het oog springen, zooals:

$$\int x^2\, d\omega = \int y^2\, d\omega, \; etc.$$

benevens van de betrekkingen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0, \; \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \; \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$$

die voor den tijd t_1 gelden, ziet men gemakkelijk dat het laatste van deze drie integralen verdwijnt, en dat de beide eersten zich te zamen laten trekken tot

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right]\int\left[(x^2 - y^2)^2 - 4\, x^2 y^2\right] d\omega.$$

Door overgang op poolcoördinaten door middel van de substitutiën:

$$x = r\cos\vartheta \sin\psi, \; y = r\sin\vartheta \sin\psi, \; z = r\cos\psi$$

dus $d\omega = r^2 \sin\psi\, d\omega$

wordt het integraal

$$r^6\int_0^{\pi}\left[\sin^5\psi\, d\,\psi\int_0^{2\pi}\cos 4\vartheta d\vartheta\right].$$

En daar $\int_0^{2\pi}\cos 4\vartheta\, d\vartheta = o$ is de stelling bewezen.

Het hier gegeven bewijs van Lagrange's stelling is omslagtiger dan dat, hetwelk gewoonlijk er van gegeven wordt; maar zijn geometrische aanschouwelijkheid weegt mijns inziens wel tegen dit bezwaar op en moge de ontwikkeling er van hier niet misplaatst doen zijn.

Keeren wij nu tot de vergelijking (3) terug; zij bevat nog iets onbepaalds, n.l. het integraal $\int \frac{dp}{\rho}$, dat geen zin heeft zoolang er nog geen betrekking tusschen p en ρ gevonden is. Bij niet zamendrukbare vloeistoffen is ρ constant en het integraal gaat dan over in $\frac{p}{\rho}$.

Bij zamendrukbare vloeistoffen of gassen, met welke wij ons in het vervolg uitsluitend zullen bezig houden, moet die betrekking afzonderlijk bepaald worden. Wij kunnen niet volstaan met de wet van Mariotte te gebruiken; want deze onderstelt dat de temperatuur van het gas constant blijft; dit is nu bij gassen, die plotseling zamengedrukt worden of zich uitzetten, niet het geval, daar met het eerste steeds een verhooging, met het laatste een verlaging van temperatuur gepaard gaat. Ten gevolge daarvan is bij verdigting de drukking steeds grooter en bij verdunning kleiner dan uit de berekening naar Mariotte's wet zou volgen. Men neemt gewoonlijk aan dat het meerdere evenredig is aan de verdigting (wat bij kleine veranderingen in de digtheid geen bezwaar oplevert). Noemt men de verdigting γ en is dus:

$$\rho = \rho_1 \, (1 + \gamma),$$

waarbij ρ_1 de normale digtheid voorstelt, dan is

$$p = a^2 \, (1 + \gamma) + b^2 \gamma$$

a^2 en b^2 zijn constanten; de quadraten dienen slechts om aan te toonen dat zij essentieel positief zijn. Verder is

$$dp = (a^2 + b^2) \, d\gamma$$

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{a^2 + b^2}{\rho_1} \; Natlog\,(1 \mp \gamma) = c^2 \; Natlog\,(1 \mp \gamma).$$

Helmholtz gebruikt [1] voor de betrekking tusschen digtheid en drukking een andere formule, die op het eerste gezigt juister schijnt te zijn, n. l.:

$$p = c\,\rho^k,$$

waarin k de verhouding tusschen de waarden der specifieke warmte van de lucht bij constante drukking en bij constant volumen voorstelt. Deze formule is de vergelijking der zoogenaamde adiabatische lijn, waardoor de betrekking van drukking en digtheid voorgesteld wordt, wanneer de toestandsveranderingen van een gas plaats hebben zonder dat er warmte wordt toe- of afgevoerd. Maar zij is alleen dan van toepassing, wanneer die veranderingen, volgens de uitdrukkingswijze der mechanische warmtetheorie, omkeerbaar zijn; m. a. w. wanneer alle arbeid die bij de zamendrukking verloren gaat of bij de uitzetting gewonnen wordt, haar aequivalent vindt in de temperatuursverandering, zonder dat een deel er van in de beweging van de gasmassa terug gevonden wordt; dit nu is bij de beweging der gassen niet het geval, tenzij men de snelheden zoo klein onderstelt, dat de tweede magt er van, dus de levendige kracht der beweging, verwaarloosd mag worden. Onderstelt men dit, dan voert ook werkelijk de formule van Helmholtz tot dezelfde uitkomsten als de meer gebruikelijke, die wij ook

---

[1] Helmholtz, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden; in Crelle's Journal für Mathematik Bd. LVII.

in het vervolg behouden zullen, hoewel het niet mag ontkend worden dat zij wel aan bedenking onderhevig is.

Voor de vergelijking (3) hebben wij dus ten slotte:

$$3^a)\quad c^2 l(1+\gamma) = V - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + T.$$

Wij zullen nu verder onderstellen, dat in het deel van de lucht dat wij beschouwen geen uitwendige krachten werken, en dat de slechts van t afhankelijke functie T reeds in de functie φ begrepen is, wat wij doen mogen, daar zij toch geen invloed op de partieele differentiaalquotienten van φ naar x, y en z kan uitoefenen; daarenboven nemen wij aan, dat de snelheden zoo klein zijn, dat haar derde en hoogere magten verwaarloosd mogen worden.

Lossen wij nu γ uit bovenstaande vergelijking op, dan vinden wij

$$\gamma = e^{-\frac{1}{c^2}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}} - 1$$

en na de ontwikkeling der exponentieele functie, met inachtneming der gemaakte onderstelling:

$$4)\quad c^2\gamma = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}$$

$c^2\gamma$ is de overmaat der drukking boven de normale drukking, zooals gemakkelijk te zien is.

Bij de gewone vraagstukken der hydrodynamika verwaarloost men ook de tweede magten der snelheden en der verdigtingen (die van dezelfde orde als de snelheden zijn), en men heeft dan voor de vergelijking 2)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

en voor de vergelijking 4)

$$4^a) \qquad \gamma = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Uit de beide laatste vergelijkingen kan γ geëlimineerd worden, en dit geeft:

$$5) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right).$$

Men kan γ ook uit de volledige vergelijkingen 2) en 3^a) elimineren, en verkrijgt dan in plaats van 5) een andere vergelijking.

Helmholz heeft nu aangetoond (zie de boven aangehaalde verhandeling), dat bij een periodische luchtbeweging en een bepaalde begrenzing, de integralen van die meer volledige vergelijking hierin van die der vergelijking (5) verschillen, dat, wanneer deze de beweging voor een enkelvoudigen toon bepaalt, gene nog een aantal boventoonen in de functie φ doet optreden. Voor ons doel zijn die boventoonen van weinig gewigt en, waar het noodig is, gebruiken wij dus de vergelijking (5).

De beschouwing van de meer volledige vergelijking voor de verdigting is evenwel noodzakelijk, daar juist die beschouwing tot een verklaring zal voeren van het verschijnsel, waarover dit proefschrift handelt. Waar het evenwel zonder bezwaar kan geschieden, zal ook somtijds van de vergelijking 4^a) worden gebruik gemaakt.

III.

OVER DE GEMIDDELDE DIGTHEID.

In het eerste hoofdstuk is reeds gezegd dat de theorie van Challis geheel berust op de beschouwing van de gemiddelde verdigting, die gedurende een periodische luchtbeweging in een punt plaats heeft. Die gemiddelde verdigting hebben wij dan vooreerst uit de vorige vergelijkingen op te maken. Wij moeten daartoe de uitdrukking voor γ voor den duur van een geheel aantal trillingen integreren.

In het algemeen is het niet mogelijk γ over een bepaalden tijd te integreren; maar wanneer wij de beweging periodisch onderstellen, weten wij op welke wijze de tijd in de functie φ voorkomt, en de integratie is dan zeer gemakkelijk.

Zijn dus de snelheden periodische functiën van den tijd, dan is de vorm van φ algemeen:

$$\varphi = f_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + f_2 \cos 2\pi \frac{2t}{T} \cdots + f_n \cos 2\pi \frac{nt}{T}$$

$$+ f_1' \sin 2\pi \frac{t}{T} + f_2' \sin 2\pi \frac{2t}{T} \cdots + f_n' \sin 2\pi \frac{nt}{T}.$$

De functiën $f_1, f'_1 \ldots f_n, f'_n$ zijn functiën van x, y en z alleen; T is de tijd van één trilling.

Door deze uitdrukking voor φ in de partieele differentiaalvergelijking, waaraan zij voldoen moet, n. l.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$$

te substitueren, en op te merken dat aan de uit die substitutie voortvloeijende vergelijking voor alle waarden van t voldaan moet zijn, vindt men, dat voor alle functiën f de vergelijking geldt:

$$\frac{\partial^2 f_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_m}{\partial z^2} + m^2 q^2 f_m = 0$$

en
$$\frac{\partial^2 f'_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f'_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f'_m}{\partial z^2} + m^2 q^2 f'_m = 0$$

waarin q geschreven is in plaats van $\frac{2\pi}{cT}$.

De gemiddelde drukking is voor k geheele trillingen

$$\frac{1}{kT}\int_0^{kT} p\,dt.$$

Stellen wij $p = h + p_1$, waarbij h de normale drukking voorstelt, dan is:

$$p_1 = c^2\gamma$$

en het overschot van de gemiddelde drukking boven de normale drukking is:

$$P = \frac{1}{kT}\int_0^{kT} c^2\gamma\,dt = -\frac{1}{kT}\int_0^{kT}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2kT}\int_0^{kT}\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} dt$$

Daar φ periodisch is met de periode T, is de waarde van dit integraal onafhankelijk van k, en men mag dus stellen $k = 1$; daarenboven is om dezelfde reden:

$$\int_0^{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dt = 0,$$

zoodat ten slotte:

$$P = \frac{1}{2T} \int_0^T \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] \right\} dt.$$

Men kan nog opmerken dat deze uitdrukking niet verandert wanneer er uitwendige krachten aanwezig zijn; want de beweging kan alleen dan periodisch blijven, wanneer ook deze krachten periodische functiën van t zijn; zooals gemakkelijk blijkt, wanneer men de functie V weder invoert. V heeft dan den vorm:

$$A_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + A_2 \cos 2\pi \frac{2t}{T} \cdots + A_n \cos 2\pi \frac{nt}{T}$$

$$+ B_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_2 \sin 2\pi \frac{2t}{T} \cdots + B_n \sin 2\pi \frac{nt}{T}$$

en dan is ook

$$\int_0^T V\, dt = 0.$$

Voert men de in de uitdrukking voor P aangeduidde differentiaties uit, dan kan ook de integratie naar t uitgevoerd worden.

In de som komen integralen voor van den vorm

$$\int_0^T \sin^2 2\pi \frac{mt}{T}\, dt \text{ en } \int_0^T \cos^2 2\pi \frac{mt}{T}\, dt$$

die beiden gelijk aan $\frac{T}{2}$ zijn, en verder integralen van den vorm

$$\int_0^T \sin 2\pi\frac{mt}{T}\cos 2\pi\frac{mt}{T}\,dt,\quad \int_0^T \sin 2\pi\frac{mt}{T}\sin 2\pi\frac{m_1 t}{T}\,dt,$$

$$\int_0^T \cos 2\pi\frac{mt}{T}\cos 2\pi\frac{m_1 t}{T}\,dt \text{ en} \int_0^T \sin 2\pi\frac{mt}{T}\cos 2\pi\frac{m_1 t}{T}\,dt,$$

die allen gelijk aan nul zijn.

Houdt men dit in het oog, dan is:

$$4P = \frac{4\pi^2}{c^2T^2}\sum_{m=1}^{n} m^2 (f^2_m + f'^2_m) - \sum_1^n\left[\left(\frac{\partial f_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_m}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$- \sum_1^n\left[\left(\frac{\partial f_m'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_m'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_m'}{\partial z}\right)^2\right]$$

of, eenvoudiger, terwijl wederom $\frac{2\pi}{cT} = q$ gesteld wordt:

$$(6)\quad 4\,P = \sum_{m=1}^{n}\left[m^2 q^2 F_m^2 - \left(\frac{\partial F_m}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial F_m}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial F_m}{\partial z}\right)^2\right]$$

waar F_m zoowel voor f_m als voor f_m' geschreven is.

Deze uitdrukking voor P kan tot een meer symmetrischen vorm gebragt worden door te letten op de differentiaalvergelijking, waaraan de F's gebonden zijn, n. l.:

$$\frac{\partial^2 F_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_m}{\partial z^2} + m^2 q^2 F_m = 0.$$

Ten gevolge van deze vergelijking heeft men ook:

$$\sum_1^n\left[m^2 q^2 F^2_m + F_m\frac{\partial^2 F_m}{\partial x^2} + F_m\frac{\partial^2 F_m}{\partial y^2} + F_m\frac{\partial^2 F_m}{\partial z^2}\right] = 0.$$

Trekt men deze vergelijking van (6) af, en let men op de identieke vergelijking:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 y^2}{\partial x^2} = y\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,$$

dan komt er:

$$(6^a)\qquad 4\,P = -\,\frac{1}{2}\sum_1^n\left[\frac{\partial^2 F^2{}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^2{}_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F^2{}_m}{\partial z^2}\right] = -$$

$$-\,\frac{1}{2}\sum_1^n\left[\Delta\;(f^2{}_m + f'^2{}_m)\right].$$

Uit de vergelijkingen (6) en (6^a) blijkt, dat, wanneer de vorm der luchttrillingen niet enkelvoudig is, maar aanleiding geeft tot een grondtoon en een reeks van harmonische boventoonen, de overmaat der drukking boven de normale eenvoudig de som is van de verhoogingen der drukking, die met ieder van die toonen afzonderlijk zouden gepaard gaan. In het vervolg zal kortheidshalve steeds ondersteld worden dat de functie φ slechts een enkelen toon bevat.

De functie φ wordt, daar zij de componenten der beweging op dezelfde wijze bepaalt als de potentiaalfunctie de componenten der krachten, wel eens snelheidspotentiaal genoemd.

De vergelijking (6^a) doet een nieuwe analogie in het oog vallen tusschen de leer van de potentiaalfunctie en bovenstaande theorie.

De grootheid $f^2 + f'^2$ is n. l. het quadraat van de grootste waarde, die het snelheidspotentiaal in een punt van de ruimte kan aannemen.

Noemt men toch die grootste waarde M_φ, dan wordt zij gevonden door eliminatie van ϑ tusschen de volgende twee vergelijkingen:

$$M_\varphi = f\ cos\ 2\pi\frac{\vartheta}{T} + f'\ sin\ 2\pi\frac{\vartheta}{T}$$

$$0 = -f\ sin\ 2\pi\frac{\vartheta}{T} + f'\ cos\ 2\pi\frac{\vartheta}{T}.$$

Die eliminatie wordt gemakkelijk uitgevoerd door beide vergelijkingen in het quadraat te verheffen en vervolgens bij elkander op te tellen. Men vindt dan:

$$M_\varphi^2 = f^2 + f'^2.$$

Daar deze grootste waarde natuurlijk onafhankelijk is van den tijd, waarop de beweging begint, verandert zij niet door een lineaire transformatie ten opzigte van t, en ditzelfde is dus ook het geval met de functie P, zooals ook à priori te verwachten was. De functie P staat nu, volgens de vergelijking (6^a), in dezelfde betrekking tot het quadraat van deze grootste waarde van φ als de digtheid van een agens tot de potentiaalfunctie. Die betrekking is n. l., wanneer D de digtheid van een agens voorstelt en V de potentiaalfunctie,

$$-4\pi D = \Delta V$$

geheel analoog aan de vergelijking (6^a).

In de elektriciteitsleer wordt van den vorm dezer uitdrukking voor de digtheid zeer dikwijls partij getrokken, omdat die vorm zich leent tot een toepassing van het theorema van Green, dat daardoor tot verschillende fraaije stellingen aanleiding geeft. Tot voorbeeld, dat datzelfde theorema ook in deze theorie goede diensten kan bewijzen, moge het betoog van de volgende stelling dienen:

Heeft in een aan alle zijden begrensd deel der ruimte periodische luchtbeweging plaats, en is die beweging van dien aard, dat overal aan de begrenzing de componente der snelheid in de rigting der normale gelijk aan nul is (hetgeen b. v. het geval is wanneer die begrenzing door een vasten wand gevormd wordt), dan volgt uit bovenstaande vergelijkingen, dat de gemiddelde drukking over den inhoud van het geheele stuk genomen, gelijk aan de normale drukking is, of:

$$\int\int\int P \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Het kan schijnen alsof deze stelling een axioma is, dat geen analytisch bewijs behoeft, daar de hoeveelheid lucht binnen de begrensde ruimte door de beweging geen vermeerdering of vermindering ondergaat, en dus de gemiddelde digtheid daar binnen dezelfde blijft; en dit ligt ook in de continuiteitsvergelijking opgesloten. Maar men bedenke, dat in onze formules steeds ondersteld is dat de snelheden en verdigtingen grootheden zijn, wier tweede en hoogere magten tegen de eerste verwaarloosd mogen worden; de grootheden van de tweede orde werden slechts aan een afzonderlijke beschouwing onderworpen, waar die van de eerste verdwenen, zoals in $\int_0^T \gamma \, dt$ het geval is. Nu drukt de continuiteitsvergelijking:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)$$

een betrekking uit enkel tusschen grootheden van de eerste orde, zoodat in deze formule slechts ligt opgesloten, dat het verschil tusschen de gemiddelde digtheid in de afgesloten ruimte, en de normale digtheid, van een orde is die verwaarloosd mag worden, dus minstens van de tweede. Wanneer nu de stelling uitgesproken wordt, dat door toepassing van bovenstaande formule dat verschil zelfs niet van de tweede orde is, dan leert die stelling werkelijk iets nieuws.

Wanneer G en H funtiën van x, y en z zijn, die binnen een begrensde ruimte doorloopend en eindig blijven, dan leidt men uit het theorema van Green af dat

$$\int\int\int G \Delta H \, dx \, dy \, dz - \int\int\int H \Delta G \, dx \, dy \, dz =$$
$$\int G \frac{\partial H}{\partial n} d\omega - \int H \frac{\partial G}{\partial n} d\omega.$$

De integralen van het tweede lid strekken zich over de geheele oppervlakte der begrenzing uit. $\frac{\partial H}{\partial n}$ en $\frac{\partial G}{\partial n}$ zijn de differentiaalquotienten van G en H in de rigting der inwendige normale. Stelt men $G = 1$ en $H = f^2 + f'^2$, dan komt, als men let op de vergelijking (6^a)

$$-4 \int\int\int P \, dx \, dy \, dz = \int \left[f \frac{\partial f}{\partial n} - f' \frac{\partial f'}{\partial n} \right] d\omega,$$

en daar aan de begrenzing de vergelijking

$$\frac{\partial f}{\partial n} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \frac{\partial f'}{\partial n} \sin 2\pi \frac{t}{T} = 0$$

voor alle waarden van t vervuld moet zijn, is daar te gelijkertijd $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ en $\frac{\partial f'}{\partial n} = 0$, zoodat

$$\int\int\int P \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Men kan deze stelling ook bewijzen zonder van het theorema van Green gebruik te maken. Eenvoudigheidshalve stellen wij $\varphi = f \cos 2\pi \frac{t}{T}$, een vorm, waartoe φ steeds door een lineaire transformatie ten opzigte van t terug te brengen is.

Nu is:

$$4 \iiint P \, dx \, dy \, dz$$
$$= \iiint \left[q^2 f^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right] dx \, dy \, dz.$$

Verder is:

$$\iiint \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dx \, dy \, dz = \left[\iint f \frac{\partial f}{\partial x} dy \, dz \right]_{x_0}^{x_1} -$$
$$\iiint f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx \, dy \, dz$$

door partieele integratie over een cylinder evenwijdig aan de x-as, met een doorsnede $dy \, dz$. In het dubbel-integraal moet voor x eerst in de plaats gesteld de abscis x_1 van dat uiteinde van den cylinder, waarvan de abscis het grootst is; vervolgens x_0, de abscis van het andere uiteinde; en de laatste waarde moet van de eerste afgetrokken worden. De uitdrukking, die men dan verkrijgt, kan aldus getransformeerd worden: noemen wij de hoeken, die de naar buiten gerigte normale aan een punt van de begrenzing met de coördinatenassen maakt, p, q en r, en de oppervlakte-elementen, die door den cylinder van het oppervlak afgesneden worden $d\omega$ en $d\omega_1$ [1], dan is:

[1] Stilzwijgend is ondersteld dat een lijn, evenwijdig aan de x-as, de oppervlakte van het begrensde stuk slechts in twee punten snijdt; een

$$[dy\,dz]_{x_1} = d\omega_1 \cos p_1 \quad \text{en} \quad [dy\,dz]_{x_0} = -\,d\omega_0 \cos p_0$$

en dus is:

$$\left[\iint f\frac{\partial f}{\partial x}\,dy\,dz\right]_{x_0}^{x_1} = \int\left[f\frac{\partial f}{\partial x}\cos p\,d\omega\right]_{x_1} + \int\left[f\frac{\partial f}{\partial x}\cos p\,d\omega\right]_{x_0},$$

en daar men alzoo over alle oppervlakte-elementen moet integreren, kan men schrijven:

$$\iiint\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dx\,dy\,dz = \int f\frac{\partial f}{\partial x}\cos p\,d\omega - \iiint f\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Telt men deze uitdrukking met die, welke men op dezelfde wijze voor $\iiint\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 dx\,dy\,dz$ en $\iiint\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 dx\,dy\,dz$ verkrijgt, bij elkander op, in het oog houdende, dat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\,q^2 f,$$

en dat: $\frac{\partial f}{\partial x}\cos p + \frac{\partial f}{\partial y}\cos q + \frac{\partial f}{\partial z}\cos r = \frac{\partial f}{\partial n} = 0$

dan vindt men voor die som eenvoudig $+\iiint q^2 f^2\,dx\,dy\,dz$, en dus is

$$\iiint P\;dx\;dy\;dz = 0.$$

Het verdient opmerking, dat, wanneer wij voor de betrekking tusschen digtheid en drukking de vergelijking $p = b\rho^k$ gekozen hadden, wij noch de gemiddelde verdigting, noch de gemiddelde overmaat van drukking (die in dat geval niet meer aan elkander evenredig zijn), gelijk nul zouden gevonden hebben door toepassing van de onvolledige

kleine wijziging in de redenering, die van zelf in het oog valt, maakt haar ook toepasselijk op het geval dat zulk een lijn het oppervlak in een grooter aantal punten snijdt.

continuiteitsvergelijking; waaruit mede ten overvloede blijkt dat de stelling geen axioma is.

Passen wij onze uitdrukking voor de gemiddelde drukking nu in de eerste plaats toe op het geval dat de beweging van een enkel punt α uitgaat, en zich in de onbegrensde ruimte voortplant, zoodat de bewegingstoestand in een bepaald punt slechts afhankelijk is van den afstand van dat punt tot α. Noemen wij den afstand van een punt (xyz) tot het centrum van beweging r, en transformeren wij de vergelijking (5) op poolcoördinaten, in aanmerking nemende, dat φ alleen van r en t afhankelijk is, en niet van de rigting van de lijn, die α met (xyz) verbindt; die vergelijking wordt door de substitutie

$$x = r \sin\psi \cos\vartheta\,,\ y = r \sin\psi \sin\vartheta\,,\ z = r\cos\psi$$

en met inachtneming dat $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = 0$ en $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\psi} = 0$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right), \text{ of eenvoudiger } \frac{\partial^2 r\varphi}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 r\varphi}{\partial r^2}.$$

Het algemeene integraal van deze vergelijking is:

$$r\varphi = F(r - ct + k) + F_1\,(r + ct + k)\,,$$

waarin k een willekeurige constante voorstelt. Daar evenwel de beweging in het punt α begint, dus $\varphi = 0$ voor alle waarden van r, wanneer $t = 0$, zoo volgt, dat $F(\delta^2 + k)$ en $F_1\,(\delta^2 + k)$ gelijk nul zijn voor iedere waarde van δ; en daar $ct + r$ uit den aard der zaak steeds positief is, volgt dat ook $F_1\,(r + ct + k) = 0$, zoodat men overhoudt

$$r\varphi = F(r - ct + k).$$

De beweging begint dus in een punt eerst wanneer $r = ct$, zoodat c de voortplantingssnelheid der beweging is.

Is nu de beweging periodisch en komt zij daarenboven overeen met een enkelvoudigen toon van n trillingen in de seconde, dan is

$$r\varphi = A \cos \frac{2\pi n}{c} (r - ct + k) + B \sin \frac{2\pi n}{c} (r - ct + k).$$

Door een lineaire transformatie ten opzigte van t, waardoor P niet verandert, zooals reeds opgemerkt is, kan deze uitdrukking gemakkelijk teruggebragt worden tot den vorm:

$$r\varphi = A \cos \frac{2\pi n}{c} (r - ct + k);$$

dus is: $f = \frac{A}{r} \cos \frac{2\pi n}{c} (r + k)$ en

$$f' = \frac{A}{r} \sin \frac{2\pi n}{c} (r + k).$$

Verder is in ons geval:

$$4\,P = \left(\frac{2\pi n}{c}\right)^2 (f^2 + f'^2) - \left(\frac{\delta f}{\delta r}\right)^2 - \left(\frac{\delta f'}{\delta r}\right)^2$$

$$\frac{\delta f}{\delta r} = \frac{A}{r^2} \left[- \frac{2\pi n}{c} \sin \frac{2\pi n}{c} (r + k) - \cos \frac{2\pi n}{c} (r + k)\right]$$

$$\frac{\delta f'}{\delta r} = \frac{A}{r^2} \left[\frac{2\pi n}{c} \cos \frac{2\pi n}{c} (r + k) - \sin \frac{2\pi n}{c} (r + k)\right]$$

en hieruit volgt gemakkelijk

$$4\,P = - \frac{A^2}{r^4}.$$

Dus zien wij vooreerst dat periodische luchtbeweging, die van een enkel punt uitgaat en zich onbeperkt kan verspreiden, altijd een vermindering van gemiddelde luchtdrukking ten gevolge heeft, en dat die verdunning zeer snel met den afstand tot het centrum van beweging afneemt. Ook blijkt uit bovenstaande vergelijking dat de grootte van die luchtverdunning onafhankelijk is van de periode der beweging, en evenredig aan de intensiteit, daar die intensiteit evenredig aan A^2 is. Is de toon niet enkelvoudig maar zamengesteld, zoodat

$$r\,\varphi = \sum_{l=1}^{m} A_l \cos \frac{2\pi l n}{c}(r - ct + k_l),$$

een uitdrukking, die evenzeer aan de differentiaal-vergelijking voldoet, dan is

$$4\,P = -\frac{\sum_{1}^{m} A_l^2}{r^4}.$$

Bevindt zich nu in de nabijheid van het punt α een voorwerp dat de verbreiding van de golf niet aanmerkelijk verhindert, dan ondervindt dat voorwerp aan de van α afgekeerde zijde een grootere drukking dan aan de zijde die naar α is toegekeerd, en dien ten gevolge zal het een streven hebben om tot het centrum van beweging te naderen.

Zij het voorwerp een cylinder, waarvan de zeer kleine dikte i en het grondvlak o is, en nemen wij aan, dat het in de nabijheid van het punt α zoo geplaatst is, dat de lijn, die dat punt met het midden van het schijfje verbindt, loodregt op het laatste staat, en zij de digtheid van het voorwerp ρ. Dan is de gemiddelde drukking aan den binnenkant op de eenheid van oppervlakte $h + P$ en aan den buitenkant $h + P + \frac{\delta P}{\delta r}\, i$, wanneer h de normaal dampkringsdrukking voorstelt, en daar deze drukking aan beide zijden op een oppervlakte o werkt, is de kracht, waarmede het schijfje naar α gedreven wordt, $o\, i\, \frac{\delta P}{\delta r}$, en dus de versnellende kracht (de kracht die op de massa-eenheid werkt): $\frac{1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta r}$.

In het geval van een enkelvoudigen toon is:

$$\frac{\delta P}{\delta r} = \frac{A^2}{r^5}.$$

Dus

$$K = \frac{A^2}{\rho r^5}.$$

De aantrekking is dus omgekeerd evenredig aan de vijfde magt van den afstand, altijd in de vooronderstelling dat het schijfje zeer dun is. Is de dikte van dit laatste niet zoo klein dat men die tegen den afstand r mag verwaarloozen, dan wordt de versnellende kracht kleiner, daar in dat geval:

$$dP = \frac{A^2 i}{r^5} \left[1 - \frac{5}{2} \frac{i}{r}\right].$$

Het is dus, om een zoo groot mogelijke aantrekking te verkrijgen, voordeelig om bij gelijk volumen de dikte van het voorwerp, dat men wil dat aangetrokken zal worden, zoo klein mogelijk te nemen. De ondervinding schijnt dit reeds geleerd te hebben, want bij het doen van de proeven kiest men bij voorkeur dunne blaadjes. Men ziet ook, dat de kracht omgekeerd evenredig is aan de digtheid van het aangetrokken voorwerp.

Het geval, dat wij nu beschouwd hebben, is door de proef met de stemvork bij lange na niet verwezenlijkt, daar bij deze de trillingen niet van een enkel punt uitgaan; maar het heeft er toch overeenkomst mede, en kan in allen gevalle doen zien, hoe door periodische luchtbeweging aantrekking kan te weeg gebragt worden.

Iets meer kan men de omstandigheden van de proef, met die, welke bij de berekening ondersteld zijn, doen zamenvallen, wanneer men aanneemt dat de trillingstoestand in een punt van de ruimte wel enkel afhankelijk is van den afstand van dat punt tot een vast punt, maar dat de trillingen niet in dat punt α zelf opgewekt worden, maar in punten die er op verschillenden afstand van verwijderd zijn.

Inderdaad kan men bewijzen (zie Helmholtz in de reeds aangehaalde verhandeling) dat, wanneer trillingen van een aantal punten uitgaan, het golffront meer en meer tot den vorm van een boloppervlak nadert, naarmate het zich verder van die punten verwijdert. Denken wij ons eenvoudigheidshalve een enkel centrum van beweging, dat zich op een afstand b van α bevindt; in dat centrum zij de vergelijking voor de snelheid:

$$V = \mu \sin 2\pi nt,$$

zoodat r het aantal trillingen in de seconde voorstelt. [1]

---

[1] Deze beschouwing is bijna onveranderd van Challis overgenomen; zij komt voor in de reeds in de inleiding aangehaalde verhandeling: "On approach caused by vibrations of the air."

Wederom heeft men als boven:

$$\varphi = A \cos \frac{2\pi n}{c} (r - ct + k).$$

Men vindt nu, door in de uitdrukking voor de snelheid, die door differentiatie van φ naar r verkregen wordt, b in plaats van r te stellen:

$$V = -\frac{2\pi n A}{cb} \sin \frac{2\pi n}{c} (b - ct + k) - \frac{A}{b^2} \cos \frac{2\pi n}{c} (b - ct + k),$$

en door de substitutie: $\dfrac{c}{2\pi nb} = tg\vartheta$

$$V = -\frac{2\pi n A}{cb} \left\{ \sin \frac{2\pi n}{c} (b - ct + k) + tg\vartheta \cos \frac{2\pi n}{c} (b - ct + k) \right\}$$

of $V = -\dfrac{2\pi n A}{cb} \left(1 + \dfrac{c^2}{4\pi^2 b^2 n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \left[\dfrac{2\pi n}{c} (b - ct + k) + \vartheta\right]$,

en daar tevens deze waarde voor V gelijk moet zijn aan $-\mu \sin 2\pi nt$, en wel voor alle waarde van t, heeft men voor de tot nog toe onbepaalde grootheden A en k de betrekkingen

$$\mu^2 = \frac{4\pi^2 A^2 n^2}{c^2 b^2} \left(1 + \frac{c^2}{4\pi^2 n^2 b^2}\right)$$

$$\frac{2\pi n}{c} (b + k) + \vartheta = \pi,$$

waaruit volgt

$$\frac{2\pi nk}{c} = \pi - \frac{2\pi bn}{c} - bgtg \frac{c}{2\pi nb}$$

waardoor k in bekende grootheden is uitgedrukt en

$$A^2 = \frac{\mu^2 b^4}{1 + \dfrac{4\pi^2 n^2 b^2}{c^2}}.$$

Dus is ten slotte

$$P = - \frac{\mu^2 b^4}{4r^4\left(1 + \frac{4\pi^2 n^2 b^2}{c^2}\right)}.$$

Hier is dus de gemiddelde drukking wel van de toonhoogte afhankelijk: maar in den regel is b zeer klein in vergelijking van de golflengte, zoodat $\frac{nb}{c}$ klein is. Heeft men meer trillende punten, dan zal men een gelijksoortige uitdrukking bekomen, en door die punten te vermeerderen en digter bij elkander te brengen, kan men meer en meer tot in werkelijkheid voorkomende gevallen, zooals dat van een trillende stemvork, naderen.

Wij hebben nu aangetoond, dat in een voortgaande geluidgolf de gemiddelde drukking in een punt niet gelijk is aan de drukking van den dampkring in zijn evenwigtstoestand; dat die gemiddelde drukking steeds kleiner is en meer en meer tot de normale drukking nadert, naarmate men zich van de bron van het geluid verwijdert.

Hierbij werd evenwel nadrukkelijk ondersteld, dat geen beletselen aan de uitbreiding van de golf in den weg staan. Zijn er zulke beletselen aanwezig, dan kan de gemiddelde drukking zeer goed in sommige punten grooter dan de normale zijn; dat zal bij voorbeeld het geval wezen, wanneer een golf gestuit wordt door een vasten wand, die loodregt op de voortplantingsrigting van de golf staat. Alsdan toch is in de onmiddellijke nabijheid van dien wand de snelheid, dus ook de uitdrukking $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ gelijk aan nul, en kan dus $4P = q^2 f^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ nimmer negatief zijn.

Plant b. v. een vlakke golf (een golf met een vlak golffront) zich voort, dan heeft men, wanneer de voortplantingsrigting tot x-as genomen wordt, en men de trillingen enkelvoudig onderstelt:

$$\varphi = (A \cos qx + B \sin qx) \sin c\, qt;$$

bevindt zich nu aan den oorsprong een vaste wand loodregt op de x-as, dan is $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ voor $x = 0$, hetgeen geeft

$$B = 0.$$

Dus is

$$f = A \cos qx$$

en

$$4P = A^2 q^2 \cos 2\, qx.$$

Voor $x = 0$, dus aan den vasten wand, is nu

$$4P = A^2 q^2.$$

Hierdoor wordt theoretisch de reeds in het eerste hoofdstuk gegeven verklaring van twee aldaar beschreven proeven bevestigd.

Het ligt nu voor de hand, ook staande golven met betrekking tot de gemiddelde verdigting, die gedurende de beweging kan plaats hebben, te onderzoeken.

Daar men zich een staande golf kan denken als ontstaan te zijn uit de zamenwerking van voortgaande golven, zoo is het waarschijnlijk dat de gemiddelde verdigtingen, die met ieder van die golven gepaard gaan, elkander in sommige punten zullen versterken, en in andere geheel of ten deele opheffen; er zullen dan punten moeten zijn waar de gemiddelde verdigting een grootste of kleinste waarde bereikt; in die punten is dan de verandering der gemiddelde drukking gelijk aan nul, en er heerscht dus in zekeren zin evenwigt; of liever, een klein voorwerp dat zich in zulk een punt bevindt zal aan alle kanten gelijke drukking ondervinden en dus in evenwigt blijven; er valt dan nog te onderscheiden tusschen standvastig en wankelbaar evenwigt.

Nemen wij als voorbeeld een eenvoudig geval: onderzoeken wij n. l. de staande golven, die in een aan beide einden gesloten buis bestaan kunnen, of, als men wil, de eigentoonen van een afgesloten luchtcylinder, en wel bepaaldelijk die toonen waarbij de luchttrillingen in de rigting van de as des cylinders plaats hebben.

Wij bepalen een punt door zijn afstand x tot het eene uiteinde der buis, gemeten in de rigting van die as.

In dit geval is de vergelijking voor de luchtbeweging

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

en het gezochte integraal van deze vergelijking moet daarenboven voldoen aan de voorwaarden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{voor } x = 0 \quad \text{en} \quad x = l,$$

wanneer l de lengte van de buis voorstelt. Die voorwaarden drukken uit, dat de beweging aan de uiteinden van de buis door een vasten wand gestuit wordt.

Het algemeenste integraal van de vergelijking, dat tevens een enkelvoudige periodische beweging voorstelt, is:

$$\varphi = (A \cos qx + B \sin qx)\,(\sin cq\,t + C \cos cq\,t).$$

Stelt men het begin van den tijd op een oogenblik dat φ gelijk aan nul is, dan is $C = 0$.

De bovengenoemde voorwaarden voor de beweging aan de uiteinden der buis geven $B = 0$ en $q = \frac{k\pi}{l}$, als k een willekeurig geheel positief getal voorstelt; dus is:

$$\varphi = A \cos k\pi \frac{x}{l} \sin k\pi \frac{c}{l} t.$$

Wij hebben voorondersteld, dat de toon enkelvoudig is, en dat φ dus slechts uit een enkelen term bestaat; de beweging kan evenwel van dien aard zijn, dat zij aanleiding geeft tot het ontstaan van een grondtoon met een willekeurig aantal harmonische boventoonen.

Daar wij de functie P zoeken, en wij weten dat die functie voor een zamengestelde luchtbeweging eenvoudig de som is van de bij de zamenstellende toonen behoorende overeenkomstige functiën, is het gemakkelijk van het door ons voorondersteld eenvoudige geval tot het meer zamengestelde over te gaan.

Wij hebben nu

$$f = A \cos k\pi \frac{x}{l}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{A\,k\pi}{l} \sin k\pi \frac{x}{l}$$

$$P = \frac{A^2 k^2 \pi^2}{4l^2} \cos 2\,k\pi \frac{x}{l}.$$

Nu zal een klein voorwerp van alle kanten gelijken druk ondervinden op die punten waar P niet verandert en waar dus $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$; en daar

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{A^2 k^3 \pi^3}{2 l^3} \sin k\pi \frac{x}{l} \cos k\pi \frac{x}{l},$$

zijn die punten gegeven door de vergelijkingen

$$\sin k\pi \frac{x}{l} = 0 \qquad \text{en} \qquad \cos k\pi \frac{x}{l} = 0.$$

Het niet veranderen van P in een punt duidt aan, dat P in zulk een punt een grootste of kleinste waarde heeft, en het is duidelijk, dat een voorwerp, wanneer het zich niet in een der punten van evenwigt bevindt, zich steeds naar zulke punten zal trachten te bewegen, waar de drukking het kleinst en dus P een minimum is. Hieruit volgt, dat men deze punten punten van standvastig evenwigt kan noemen; en daarentegen die, waar P een minimum is, van wankelbaar evenwigt; want zoodra het kleine voorwerp zich even van zulk een voorwerp verwijdert, zal het in de zelfde rigting steeds voortbewogen worden, totdat het een punt van standvastig evenwigt bereikt. Het tweede differentiaalquotient van P beslist over een maximum of minimum. Men heeft

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{A^2 k^2 \pi^4}{l^4} \left[\cos^2 \pi \frac{x}{l} - \sin^2 \pi \frac{x}{l} \right],$$

en uit deze uitdrukking volgt, dat P in punten, die gegeven zijn door de vergelijking $\cos \pi \frac{x}{l} = 0$, een minimum, en in die, welke bepaald worden door de vergelijking $\sin \pi \frac{x}{l} = 0$, een maximum is.

Nu volgt door differentiatie van φ naar x, dat deze laatste punten tevens die zijn, waar de snelheid nul is, dus de zoogenaamde knoopen. Lost men de vergelijking op, dan vindt men voor die punten:

$$x = 0,\ \frac{1}{k}l,\ \frac{2}{k}l, \ldots\ \frac{k\text{-}1}{k}l,\ l.$$

Men ziet tevens, dat in die punten f^2 de grootst mogelijke waarde bereikt, hetgeen beduidt dat de periodische veranderingen der digtheid er een maximum zijn, gelijk blijkt uit de vergelijking

$$\gamma = -\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

De uiterste waarden, die γ binnen den duur van een trilling kan aannemen, zijn dus in ons geval $\pm\ \frac{f}{c^2}$, en dus wijst een maximum van f^2 op een grootste periodische digtheidsverandering.

De punten, gegeven door de vergelijking $\cos k\,\pi\frac{x}{l} = 0$, zijn tevens die, waar $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$, en dus de snelheid een maximum is, en waar daarenboven $f = 0$, of wat hetzelfde is $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$. In deze laatste vergelijking wordt uitgedrukt, dat dat deel der periodische verdigtingen, dat van de eerste orde is, verdwijnt, gelijk uit de vergelijking 4a) blijkt. Deze punten zijn de zoogenaamde buiken, in welke dus tevens het evenwigt standvastig is; de oplossing der vergelijking $\cos k\pi\frac{x}{l} = 0$, geeft

$$x = \frac{1}{2k}l,\ \frac{3}{2k}l, \ldots\ \frac{2k\text{-}1}{2k}l.$$

Op dezelfde wijze zal men vinden, dat voor een buis, die aan het eene uiteinde open en aan het andere gesloten is, de knoopen zamenvallen met de punten van wankelbaar, en de buiken met punten van standvastig evenwigt.

Kundt heeft de luchtbeweging in buizen door het instrooijen van poeders aanschouwelijk gemaakt, en hierin zelfs een middel gevonden om de voortplantingssnelheid van het geluid in verschillende gassen zeer naauwkeurig te bepalen.

Gebruikt men tot dat doel b. v. semen Lycopodii, dan hoopt zich dat steeds in de knoopen op; maar gebruikt men een poeder, waarvan de enkele korrels een grootere massa hebben, b. v. kurkvijlsel, dan verzamelt dit zich daarentegen op de buiken en schikt zich daar op rijen loodregt op de as van de buis. Het ontstaan van deze rijen is een tot nog toe niet genoegzaam verklaard verschijnsel; maar het feit dat zij juist ontstaan op de buiken, komt mij voor door bovenstaande theorie als van zelf verklaard te worden. De reden, waarom een fijner poeder zich op de knoopen ophoopt, is dezelfde, die een dergelijk poeder noopt om op een trillende plaat zich aan de punten van groote beweging te verzamelen. De geringe massa der enkele korrels maakt ze geheel tot een speelbal der luchtbeweging, en deze verhindert ze om aan kleine uitwendige krachten te gehoorzamen. Wij hebben reeds gezien, dat de versnellende kracht, die door de verschillen in de gemiddelde drukking ontstaat, alleen afhankelijk is van de densiteit en niet van de absolute grootte der ligchamen, waarop zij werkt, mits deze slechts niet groot genoeg zijn om de voortplanting der luchtbeweging aanmerkelijk te storen. De beweging der lucht daarentegen heeft den meesten invloed op voorwerpen, die bij een gegeven massa de grootst mogelijke oppervlakte hebben, en dit is het geval bij zeer fijne poeders.

Wij hebben dus hier te doen met een verschil, dat geheel analoog is aan het verschil dat fijne en grove poeders vertoonen, wanneer zij op een trillende plaat gestrooid worden, en waarover reeds in het begin van dit opstel gesproken is.

IV.

REGTHOEKIGE LUCHTPLATEN.

Onderzoeken wij nu een geval dat eenigzins meer zamengesteld is, n. l. de staande golven, die bestaan kunnen in een afgesloten luchtvolumen. Wij onderstellen evenwel dat in dat luchtvolumen de beweging overal evenwijdig is met een bepaald vlak; dit is b. v. het geval wanneer een der afmetingen zeer klein wordt, en wij met een zoogenaamde luchtplaat te doen hebben. Dit laatste is evenwel niet noodzakelijk; men kan zich even goed voorstellen dat wij een regten cylinder hebben met een willekeurig grondvlak, waarin de beweging overal loodregt op de as plaats heeft en in iedere doorsnede evenwijdig met het grondvlak dezelfde is. Dit geval is dus in zekeren zin het omgekeerde van het vorige, waar wij de beweging evenwijdig met de as des cylinders onderstelden. Het is hierom van bijzonder belang, omdat de resultaten, die de berekening zal opleveren, vatbaar zijn voor experimenteele verificatie. Het middel daartoe wordt aan de hand gedaan door de fraaije onderzoekingen van Kundt over de trillingen van luchtplaten, waarop het dus noodig zal zijn later terug te komen.

Nemen wij een der grondvlakken van den cylinder als xy-vlak aan; dan is de vergelijking voor de luchtbeweging, daar overal $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ en dus ook $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right),$$

die weder gëintegreerd moet worden met inachtneming van de voorwaarde, dat aan den omtrek van den cylinder de normale componente der beweging nul is. Bij een enkelvoudige periodische beweging, waarvoor φ den vorm moet hebben:

$$\varphi = f \cos c\, q\, t,$$

heeft men voor f de nieuwe differentiaal-vergelijking:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + q^2 f = 0,$$

en voor P

$$4\, P = q^2 f^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2.$$

De componenten van de versnellende kracht, die, ten gevolge van de verschillen in de gemiddelde drukking gedurende de beweging, op een ligchaampje van de digtheid ρ werkt, zijn $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$ en $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$.

Het negatieve teeken staat voor deze uitdrukking, omdat, bij aangroeijing der drukking in een bepaalde rigting, de kracht in de tegenovergestelde rigting werkt.

De punten, waar beide componenten nul zijn, zijn punten van evenwigt, en, door de uitdrukking voor P te differentieren, ziet men dat vooreerst alle knoopen zulke punten zijn: m. a. w. de vergelijkingen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sluiten in zich $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Het is misschien niet overbodig te wijzen op het onderscheid, dat tusschen de klankfiguren van gewone platen en membranen, en luchtplaten bestaat. Bij de eersten zijn de plaatsen van rust lijnen, bij de laatsten punten.

Stelt men zich nu de vraag, of in de knoopen het evenwigt standvastig of wankelbaar zal zijn, dan is het antwoord:

Het evenwigt is voor alle knoopen, in welke f^2 een maximum of een minimum is, wankelbaar.

Dit antwoord wijst reeds op het bestaan van twee verschillende soorten van knoopen, die waar f^2 een maximum, en die waar dezelfde grootheid een minimum is. Deze onderscheiding is het eerst door Kundt gemaakt; hij noemt de eerste soort enkelvoudige knoopen of knoopen van de eerste orde; de tweede, dubbele knoopen of knoopen van de tweede orde. Tevens is de mogelijkheid niet uitgesloten, dat er knoopen zijn waar f^2 noch een maximum noch een minimum is.

Deze benaming van dubbele knoopen wordt hierdoor geregtvaardigd, dat in die punten niet slechts geen beweging plaats heeft, maar ook geen periodische verdigting en verdunning; men herinnert zich, dat bij luchttrillingen in de rigting van de as eens cylinders, in alle punten waar geen beweging plaats heeft de periodische verdigting en verdunning een grootste waarde bereikt. Dat dubbele knoopen in dat geval niet kunnen bestaan, volgt uit de differentiaalvergelijking voor f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + q^2 f = 0;$$

die ook geschreven kan worden:

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2} + 2q^2 f^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

In de punten, waar $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, is dus

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2} \leqq 0,$$

en een minimum van f^2 vereischt dus $f^2 = 0$.

Maar in punten, waar tegelijkertijd

$$f = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

zijn ook volgens de differentiaalvergelijking alle verdere differentiaalquotienten van f gelijk aan nul, zoodat dit geval alleen kan voorkomen wanneer er nergens beweging is.

Geheel anders evenwel is het, wanneer de beweging zich over twee afmetingen kan uitstrekken. Dan veroorzaakt het tegelijkertijd nul zijn van f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ niet het verdwijnen van alle verdere differentiaalquotienten van f, en kunnen er dus gedurende de beweging punten optreden, waarin f^2 een minimum is en tegelijk $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Ook in dit geval valt een minimum van f^2 tezamen met $f = 0$, gelijk gemakkelijk uit een redenering, analoog met de bovenstaande, blijkt.

Wij zullen nu bewijzen, dat in beide soorten van knoopen het evenwigt wankelbaar is.

Uit de vergelijking

$$4P = q^2 f^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

volgt in de onderstelling $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$,

$$a) \qquad 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = q^2 f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2$$

en

$$2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = q^2 f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2.$$

Let men op de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + q^2 f = 0,$$

en schrijft men ter bekorting:

$$D_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \text{ dan is}$$

$$b) \quad 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 2q^2 f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - D_f \text{ en } 2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 2q^2 f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - D_f.$$

Verder vindt men gemakkelijk:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = q^2 f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

en dus $4D_p = D_f(2q^4 f^2 - D_f)$,

wanneer D_p geschreven wordt voor: $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$.

Nu behoeft, zooals reeds is opgemerkt, in een punt waar $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, f nog niet noodzakelijk een maximum of een minimum te zijn; daartoe wordt nog vereischt dat $D_f < 0$. Evenzoo moet, opdat P een maximum of minimum zij, be-

behalve aan de vergelijkingen $\frac{\delta P}{\delta x} = 0$ en $\frac{\delta P}{\delta y} = 0$, nog voldaan zijn aan de ongelijkheid $D_p < 0$. Uit de uitdrukking, die wij voor D_p gevonden hebben, blijkt evenwel dat, wanneer $\frac{\delta f}{\delta x} = 0$, $\frac{\delta f}{\delta y} = 0$ en $D_f < 0$, ook $D_p < 0$ is. Is nu $D_f < 0$, dan hebben $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$ en $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$, hetzelfde teeken, dat blijkens de differentiaalvergelijking het tegenovergestelde van dat van f is. Hieruit volgt, als men let op de uitdrukkingen voor $\frac{\delta^2 P}{\delta x^2}$ en $\frac{\delta^2 P}{\delta y^2}$, dat deze grootheden het negatieve teeken hebben, en dat dus P een maximum is. En dit wilden wij bewijzen.

Beschouwen wij nog die knoopen, voor welke $D_f \geqq 0$.

Is $D_f = 0$, dan is ook $D_p = 0$, en $\frac{\delta^2 P}{\delta x^2}$ en $\frac{\delta^2 P}{\delta y^2}$ zijn om dezelfde redenen als boven negatief.

In dit geval is er dus één richting, waarin het tweede differentiaalquotient van P nul is; m. a. w. stelt men $ds = dx \cos \alpha + dy \sin \alpha$, dan is er een waarde van α te vinden, zoodat $\frac{\delta^2 P}{\delta s^2} = 0$; en dan is in de rigting, die met de rigting van de x-as een hoek α, maakt, het evenwigt onverschillig, en een klein ligchaam, dat uit den knoop in die rigting een weinig verplaatst wordt, blijft in rust.

Is $D_f > o$, dan moet onderscheiden worden tusschen de gevallen $D_f \gtrless 2q^4 f^2$.

Is $D_f > 2q^4 f^2$, dan is $D_p < o$, en dus P een maximum of een minimum; dat P wederom een maximum is, vindt men door de vergelijkingen b) bij elkander op te tellen; men vindt:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -(q^4 f^2 + D_f).$$

Is $D_f < 2q^4 f^2$, dan is $D_p > 0$, en dus P noch een maximum, noch een minimum; evenwel blijft de uitdrukking $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ negatief.

In het laatste geval zijn er twee rigtingen, waarin het evenwigt onverschillig is.

Men kan zich deze resultaten aanschouwelijk voorstellen, door zich P als een derde coördinaat te denken. De vergelijking: $4\,P = q^2 f^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ is dan de vergelijking van een oppervlak.

De punten, waarvoor $\frac{\partial P}{\partial x}$ en $\frac{\partial P}{\partial y}$ nul zijn, zijn dan die, waarin het raakvlak evenwijdig aan het vlak xy is. Is $D_p < 0$, dan zijn die punten elliptische punten; is $D_p = 0$, dan zijn zij parabolische, en is $D_p > o$, hyperbolische of zadelpunten. In een oppervlak is steeds, zooals men weet, de som der krommingen in twee loodregt op elkander staande rigtingen constant; die som is in ons geval (waar $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$) $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$, en wij hebben gezien, dat die som in alle knoopen negatief is.

Op de knoopen vonden wij een eenvoudige uitdrukking voor die som; een dergelijke eenvoudige uitdrukking vindt men evenwel voor haar in alle punten.

In het algemeen is n. l.

$$2\,\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = q^2 f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + q^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}$$

$$2\,\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = q^2 f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + q^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}.$$

Door te letten op de betrekkingen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + q^2 f = 0\,,$$

en de vergelijkingen, die door differentiatie naar x en y uit deze voortvloeijen,

en $$4\,P = q^2 f^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,$$

vindt men voor de som

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + 4\,q^2 P + D_f = 0.$$

Uit deze vergelijking volgt, dat wanneer overal $D_f = 0$, en dus de vergelijking $z = f$ een ontwikkelbaar oppervlak voorstelt, de functie P aan een differentiaalvergelijking voldoet, die alleen van die voor f verschilt, doordat $2q$ in de plaats van q komt.

Een dergelijk geval hebben wij reeds gehad, toen wij de trillingen van een luchtcylinder evenwijdig aan de as behandelden. De uitdrukking voor P, bij een zekeren toon gevonden, is daar ook slechts door een constanten factor onderscheiden van de functie f voor den toon van het dubbele aantal trillingen.

Daar uit de vergelijkingen

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(q^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \left(q^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ geëlimineerd kunnen worden, wanneer ze niet beiden nul zijn, zoo geldt voor alle punten, waar evenwigt is en die niet tevens knoopen zijn, de betrekking

$$\left(q^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(q^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 2\, q^4 f^2 - D_f = 0.$$

In al die punten is dus $D_f \geqq 0$. Stelt de vergelijking $z = f$ een ontwikkelbaar oppervlak voor, dan is in al die punten $f^2 = 0$, m. a. w. er hebben geen periodische verdigtingen en verdunningen plaats. In het bijzondere geval van een luchtcylinder, waar de trillingen evenwijdig met de as plaats hebben, hebben wij dit reeds bevestigd gevonden. Als bijzonder geval van een luchtplaat zullen wij zulk een luchtplaat beschouwen, waarvan de begrenzing een regthoek is.

Noemen wij de zijden van den regthoek a en b, en stellen wij den oorsprong der coördinaten in een der hoekpunten van den regthoek, terwijl wij twee der zijden met de coördinatenassen doen zamenvallen. De differentiaalvergelijking $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + q^2 f = 0$ moet dan geïntegreerd worden met inachtneming der grensvoorwaarden:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ voor $x = 0$ en $x = a$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ voor $y = 0$ en $y = b$.

Stellen wij $f = e^{\pm(\alpha x \pm \beta y)\sqrt{-1}}$, dan is volgens de vergelijking: $\alpha^2 + \beta^2 = q^2$. Door de exponentieele functie in goniometrische over te brengen, en de eigenschap van partieele differentiaalvergelijkingen toe te passen, dat, wanneer $\varphi(xy)$ en $\psi(xy)$ er aan voldoen, ook $A\varphi + B\psi$ een integraal der vergelijking is, vindt men gemakkelijk dat $\cos \alpha x \cos \beta y$ $\cos \alpha x \sin \beta y$, $\sin \alpha x \cos \beta y$ en $\sin \alpha x \sin \beta y$ integralen der differentiaalvergelijking zijn. Van deze voldoet evenwel slechts de eerste aan de grensvoorwaarden: $\frac{\delta f}{\delta x} = 0$, voor $x = 0$ en $\frac{\delta f}{\delta y} = 0$, voor $y = 0$. De overblijvende grensvoorwaarden geven: $\alpha a = m\pi$ en $\beta b = n\pi$, wanneer m en n geheele getallen voorstellen.

Dus is:

$$f = A \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y,$$

terwijl m en n aan elkander verbonden zijn, door de betrekking:

$$\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) = q^2.$$

Daar q evenredig is aan het aantal trillingen in de seconde, vindt men de trillingsgetallen van alle mogelijke toonen der plaat door aan m en n achtereenvolgens alle mogelijke waarden te geven. Zijn a en b ten opzigte van elkander onmeetbaar, dan behoort bij zulk een trillingsgetal slechts één bepaald stel waarden van m en n. Is dit evenwel niet het geval, dan kan $q^2 = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \frac{m_1{}^2}{a^2} + \frac{n_1{}^2}{b^2}$, en dan geeft de vergelijking $f = A_1 \ cos \ \frac{m_1\pi}{a} x \ cos \ \frac{n_1\pi}{b^2} y$ evenzeer een mogelijken trillingsvorm van dezelfde periode, zoodat een algemeener uitdrukking voor f voor die periode wordt:

$$f = A \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y + A_1 \cos \frac{m_1\pi}{a} x \cos \frac{n_1\pi}{b} y.$$

Evenzoo kan in sommige gevallen de uitdrukking voor f uit drie en meer termen bestaan, die met willekeurige constanten vermenigvuldigd zijn; in zulk een geval is de trillingsvorm der plaat van die constanten afhankelijk, en dus onbepaald.

Wij zullen in het vervolg onderstellen dat a en b onderling onmeetbaar zijn, of, waar wij dit niet doen, ons tot toonen bepalen waarbij slechts één stel waarden van m en n behoort.

Voor de ligging der knoopen hebben wij het volgende stel vergelijkingen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{Am\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{An\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0.$$

Deze vergelijkingen laten zich splitsen in de volgende paren:

$$\sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \quad \text{en} \quad \sin \frac{n\pi}{b} y = 0$$

$$\cos \frac{m\pi}{a} x = 0 \quad \text{en} \quad \cos \frac{n\pi}{b} y = 0.$$

Men ziet dat de waarden van x en y, die aan het laatste paar vergelijkingen voldoen, tevens voldoen aan de vergelijking $f = 0$, en dat de punten, die door haar bepaald worden, dus knoopen van de tweede orde zijn. In de knoopen die door het eerste paar vergelijkingen gegeven worden, is f^2 een maximum, daar in die punten $f \gtreqless 0$ en $D_f < 0$.

Voor beide soorten van knoopen moet dus het evenwigt naar alle rigtingen wankelbaar zijn, en men zal dit ook in het volgende bevestigd vinden.

Voor P hebben wij

$$\frac{4}{A^2} P = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) cos^2 \frac{n\pi}{a} x \, cos^2 \frac{n\pi}{b} y -$$

$$- \frac{m^2\pi^2}{a^2} sin^2 \frac{m\pi}{a} x \, cos^2 \frac{n\pi}{b} y - \frac{n^2\pi^2}{b^2} cos^2 \frac{m\pi}{a} x \, sin^2 \frac{n\pi}{b} y$$

of: $$\frac{4P}{\pi^2 A^2} = \frac{m^2}{a^2} cos \frac{2mx}{a} \pi \left(cos \frac{ny}{b} \pi\right)^2 + \frac{n^2}{b^2} cos \frac{2ny}{b} \pi \left(cos \frac{mx}{a} \pi\right)^2.$$

Hieruit volgt

$$- \frac{4}{A^2\pi^3} \frac{\delta P}{\delta x} = \frac{m}{a} sin \frac{2mx}{a} \pi \left[\frac{m^2}{a^2} + \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) cos \frac{2ny}{b} \pi\right]$$

$$- \frac{4}{A^2\pi^3} \frac{\delta P}{\delta y} = \frac{n}{b} sin \frac{2ny}{b} \pi \left[\frac{n^2}{b^2} + \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) cos \frac{2mx}{a} \pi\right].$$

De punten van evenwigt worden gevonden door deze uitdrukkingen aan nul gelijk te stellen.

Dit geeft de volgende paren vergelijkingen:

$$sin \frac{mx}{a} \pi = 0 \qquad sin \frac{ny}{b} \pi = 0$$

$$cos \frac{mx}{a} \pi = 0 \qquad cos \frac{ny}{b} \pi = 0$$

$$sin \frac{mx}{a} \pi = 0 \qquad cos \frac{ny}{b} \pi = 0$$

$$cos \frac{mx}{a} \pi = 0 \qquad sin \frac{ny}{b} \pi = 0$$

$$\frac{n^2}{b^2} + \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) cos \frac{2mx}{a} \pi = 0 \qquad \frac{m^2}{a^2} + \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) cos \frac{2ny}{b} \pi = 0.$$

De beide eerste paren bepalen tevens de knoopen.

De ontwikkeling van $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ doet gemakkelijk zien dat P in die punten een maximum is, zooals wij reeds weten dat het geval moet zijn.

In de twee volgende paren zijn alle punten opgesloten, waarin het evenwigt standvastig is. In die punten is $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 0$ en $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ beide grooter dan nul, zoodat $D_p < 0$, waaruit de standvastigheid van het evenwigt in alle rigtingen blijkt.

Eindelijk is in de punten, die door het laatste paar vergelijkingen bepaald worden, $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$ en $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$, zoodat $D_p > 0$. P is dus in die punten noch een maximum noch een minimum. De vergelijking $z = P$, als de vergelijking van een oppervlak gedacht, heeft in die punten een gelijkzijdige hyperbool tot indicatrix, van welke de asymptoten evenwijdig aan de coördinaten assen loopen. Dus wordt de kleine vlakte om zulk een punt door lijnen, evenwijdig aan de coördiatenassen getrokken, in vier quadranten gedeeld, in welke beurtelings de drukking grooter of kleiner is dan in het punt zelf.

De ligging van alle bijzondere punten der regthoekige luchtplaat kan men zich nu op de volgende wijze veraanschouwelijken:

Beschouwt men van de vergelijkingen, die de enkelvoudige knoopen bepalen, $\sin \frac{mx}{a} \pi = 0$ en $\sin \frac{ny}{b} \pi = 0$ als vergelijkingen van regte lijnen, dan wordt door die lijnen de luchtplaat in $m \times n$ gelijke en gelijkvormige regthoeken verdeeld, in al welke de bijzondere punten geheel op dezelfde gelegen zijn; de hoekpunten van iederen regthoek zijn de knoopen van de eerste orde; in het middelpunt van iederen regthoek ligt een knoop van de tweede orde; want die punten zijn gegeven door $\cos \frac{mx}{a} \pi = 0$ en $\frac{\cos ny}{b} \pi = 0$,

dus door $$x = \frac{1}{2} \frac{a}{m}, \frac{3}{2} \frac{a}{m}, \ldots \ldots \frac{2m\text{-}1}{2} \frac{a}{m}$$

en $$y = \frac{1}{2} \frac{b}{n}, \frac{3}{2} \frac{b}{n}, \ldots \ldots \frac{2n\text{-}1}{2} \frac{b}{n}.$$

Het midden van de zijde van een regthoek is een punt van standvastig evenwigt, daar zulk een punt voldoet aan de vergelijkingen

$$\sin \frac{mx}{a} \pi = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\cos ny}{b} \pi = 0 \qquad \text{of}$$

$$\cos \frac{mx}{a} \pi = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\sin ny}{b} \pi = 0.$$

De punten van gemengd evenwigt zijn in iederen regthoek ten getale van vier voorhanden; hun ligging wordt bepaald door de vergelijkingen:

$$x = (2\,k\text{-}1) \frac{a}{2m} \pm \frac{a}{2m\pi} \, bg \cos \frac{\frac{n^2}{b^2}}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}},$$

en $$y = (2\,k_1\text{-}1) \frac{b}{2n} \pm \frac{b}{2n\pi} \, bg \cos \frac{\frac{m^2}{a^2}}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}};$$

k en k_1 zijn geheele positieve getallen, en die resp. alle waarden tusschen 0 en m en 0 en n kunnen aannemen.

Denkt men zich dus ter weêrszijde van de lijnen, die in een regthoek de middelpunten van twee overstaande zijden vereenigen, lijnen daarmede evenwijdig en resp. op een afstand van $\frac{a}{2m}\, bg\cos \frac{n^2a^2}{m^2b^2+n^2a^2}$ en $\frac{b}{2n}\, bg\cos \frac{m^2b^2}{m^2b^2+n^2a^2}$, dan zijn de vier punten, waarin deze vier lijnen elkander twee aan twee snijden, de gezochte punten van gemengd evenwigt.

Er moet nu nog onderzocht worden in welke quadranten de gemiddelde drukking aangroeit en in welke zij afneemt.

Stelle te dien einde $\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}$ het tweede differentiaal-quotient van P voor in een rigting, die met de positieve x-as een hoek α maakt. Dan is:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}\sin 2\alpha + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\sin^2\alpha.$$

Nu is in de beschouwde punten $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$ en $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ en $\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = \frac{A^2\pi^2}{2}\frac{mn}{ab}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\sin\frac{2mx}{a}\pi\,\sin\frac{2ny}{b}\pi.$

Dus $$\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} = \gamma^2 \sin\frac{2mx}{a}\pi\,\sin\frac{2my}{b}\pi\,\sin 2\alpha\,;$$

γ^2 is een van x y en α onafhankelijke positieve grootheid.

Het product $\sin\frac{2mx}{a}\pi$ en $\cos\frac{2ny}{b}\pi$ is positief of negatief, naarmate in de uitdrukkingen voor x en y gelijke of ongelijke teekens genomen zijn.

In het eerste geval is $\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}$ positief voor $0 < \alpha < 90°$

en 180 $< \alpha <$ 270°; in het laatste voor 90° $< \alpha <$ 180° en 270° $< \alpha <$ 360°.

Hieruit volgt, dat de drukking in de vier binnenste quadranten, m. a. w. in die, waarin zich het middelpunt van den regthoek bevindt, toeneemt; in de quadranten, die er tegenover liggen, neemt zij natuurlijk evenzeer toe; in de overige neemt zij af.

Er is reeds op gewezen, dat de klankfiguren van luchtplaten het middel opleveren, om de resultaten der theorie aan de ervaring te toetsen. Die klankfiguren worden op de volgende wijze verkregen [1]:

Tusschen twee horizontaal op elkander liggende glazen platen wordt een blad bordpapier gelegd, waarin een stuk is uitgesneden, van den vorm van de luchtplaat die men onderzoeken wil. Die platen te zamen met het blad bordpapier sluiten dus een luchtvolumen af van de gevorderde gedaante. Om dit luchtvolumen in staande trillingen te brengen is in de bovenste plaat eene opening geboord van ongeveer anderhalven centimeter middellijn; die opening wordt met een schijfje kurk gedekt. Wordt nu een glazen buis, welker longitudinaaltoon overeenkomt met een van de eigentoonen der luchtplaat, met een nat lapje gewreven, terwijl men ze verticaal in het midden vasthoudt, en wel zoo, dat het onderste uiteinde, dat met een kurk gesloten wordt,

[1] Ik ben deze methode verschuldigd aan Prof. Kundt te Würzburg, onder wiens welwillende leiding ik mij eenigen tijd met luchtplaten heb bezig gehouden.

met het kurken plaatje in aanraking is, dan zal dit laatste de beweging van het uiteinde der buis volgen en zoo de trillingen aan het zich daaronder bevindende luchtvolumen meêdeelen. Men moet het zoo inrigten, dat zich onder de opening juist een knoop bevindt, daar de verticaal op- en nedergaande beweging van het plaatje alleen aanleiding geeft tot opvolgende verdigtingen en verdunnningen van de lucht, die er zich onder bevindt, en niet tot luchtbeweging in een bepaalde rigting.

Om den trillingsvorm van de luchtplaat zigtbaar te maken, is op de onderste plaat een fijn poeder gestrooid. Stemt nu de toon der buis overeen met een der eigentoonen van de plaat — en die overeenstemming laat zich na eenig beproeven gemakkelijk tot stand brengen — dan zal dit poeder, wanneer het zeer fijn verdeeld is, zooals b. v. semen Lycopodii of carbonas magnesii, in hevige beweging geraken en zich langzamerhand in de knoopen ophoopen. Is het daarentegen niet zeer fijn, maar toch van eene geringe densiteit, zooals kurkvijlsel, dan zal het zich niet naar de knoopen begeven, maar integendeel op plaatsen, waar de luchtbeweging zeer sterk is, de reeds meer besproken rijen vormen, die steeds loodregt op de rigting der beweging staan.

Het ligt nu voor de hand te onderzoeken, of de plaatsen waar die rijen zich bij voorkeur vormen, waar dus het meeste poeder zich ophoopt, misschien de punten zijn waar de gemiddelde digtheid een minimum bereikt; bij de proeven met dat oogmerk door mij genomen, is dit werkelijk gebleken.

Deze punten vallen dus in de klankfiguur eener trillende luchtplaat dadelijk in het oog. Maar ook de enkele en dubbele knoopen zijn in zulk een figuur gemakkelijk te herkennen en van elkander te onderscheiden. Dit laatste wordt mogelijk gemaakt door de omstandigheid, dat de rijen altijd loodregt op de rigting der beweging staan. Men houde daarbij in het oog, dat zij niet uitsluitend optreden in de punten van standvastig evenwigt, maar overal waar luchtbeweging is; slechts zijn zij in die punten dikker en worden dit, wanneer de toon eenigen tijd aanhoudt, hoe langer hoe meer. Ik laat hier de woorden van Kundt over het onderscheid tusschen enkele en dubbele knoopen eener klankfiguur volgen.

"Om enkele punten schikt zich het poeder in zeer regelmatige concentrische kringen; in het midden van deze kringen bevindt zich een punt, waar de lucht in rust blijft. Dit punt moet noodzakelijk een enkelvoudige knoop zijn; want de beweging der lucht is van alle kanten radiaal naar dit punt heengerigt of er van af. Er moet dus afwisselend in ieder middelpunt der kringen verdigting of verdunning heerschen. Daar deze kringen het beschouwde punt geheel omringen, zonder ergens afgebroken te zijn, is het onmogelijk dat een deel der lucht naar het middelpunt toestroomt, terwijl tegelijkertijd een ander deel er van wegstroomt, zoodat in het middelpunt toch altijd de drukking de normale blijft; had dit plaats, dan zouden noodzakelijk tusschen de beide luchtmassa's, wier bewegingsrigting ten opzigte van het middelpunt tegenovergesteld was, de kringen ergens afgebroken moeten zijn. Alle punten dus, die door concentrische kringen omgeven zijn, zijn enkelvoudige knoopen. Vier zulke enkelvoudige knoopen met de kringen rondom, sluiten evenwel nog een punt van rust in, dat dus door vier groepen cirkelboogvormige kringen omgeven is. Deze punten zijn knoopen van de tweede orde of dubbele knoopen. Beschouwt men namelijk een tijdstip, waarop in een der vier omringende enkelvoudige knoopen de verdigting een maximum bereikt, dan moet in de beide naastliggende knoopen de verdunning een maximum bereiken. Dit behoeft geen nader bewijs; het is duidelijk dat in twee naburige knoopen, die door een enkelen buik gescheiden zijn, de phasen tegenovergesteld zijn. Er moet dus in den vierden, enkelvoudigen knoop weder een maximum der verdigting zijn." Wanneer men zich nu de beweging der lucht rondom dat punt voorstelt, ziet men gemakkelijk in, dat in het door de vier kringen omgeven punt verdigting noch verdunning kan plaats hebben. Er zijn n. l. tegelijkertijd vier stroomen, waarvan er twee zich van het punt af bewegen, tengevolge van de verdunning in twee der omringende knoopen; de twee overigen bewegen zich naar het punt toe, ten gevolge van de in de beide andere omringende knoopen heerschende verdigting; zoodat er in het punt zelf geen vermeerdering of vermindering der hoeveelheid lucht plaats heeft. De dubbele knoopen zijn dus in het algemeen hierdoor gekarakteriseerd, dat zij niet door gesloten kringen omgeven zijn, maar door verscheidene groepen van rijen, die haar convexe zijde naar den dubbelen knoop toekeeren.

Kiezen wij als voorbeeld een vierkante luchtplaat met de zijde a. Geeft deze plaat haar tweeden eigentoon, voor welken dus $m = 1$ en $n = 1$ (voor den laagsten is $m = 1, n = 0$), dan is in overeenstemming met het bovenstaande de schikking van het kurkvijlsel aldus: In de nabijheid van de vier hoekpunten is het poeder verdwenen; het heeft zich in kringen, die nagenoeg den vorm van cirkelquadranten hebben, om die hoekpunten geschikt; in het midden van de zijden van het vierkant, waar dus twee kringengroepen elkander raken, is de ophooping van poeder het sterkst; in het middelpunt van de luchtplaat bevindt zich, evenals in de hoekpunten, bijna geen poeder meer; men ziet met den eersten oogopslag dat dat punt een dubbele knoop moet zijn, daar de kringen er hun convexe zijden heen gekeerd hebben; de punten van wankelbaar evenwigt zijn door geen bijzonderheid in de figuur gekenmerkt; zij liggen in ons geval op de diagonalen en deelen die in drie gelijke stukken; want daar $a = b$ en $m = n = 1$, zijn zij gegeven door de vergelijkingen

$$x = \frac{2k\text{-}1}{2}\, a \pm \frac{a}{2\pi}\, bg \cos \frac{1}{2} \text{ en } y = \frac{2k_1\text{-}1}{2}\, a \pm \frac{a}{2\pi}\, bg \cos \frac{1}{2},$$

en dus $$k = \frac{1}{3}\, a \text{ of } \frac{2}{3}\, a \text{ en } y = \frac{1}{3}\, a \text{ of } \frac{2}{3}\, a,$$

Daar $q = \frac{\pi}{a}\sqrt{2}$, is de toonhoogte dezelfde als van den grondtoon eener aan beide einden gesloten buis, waarvan de lengte gelijk is aan den halven diagonaal van de luchtplaat; want bij zulk een buis is voor den grondtoon

$$q = \frac{\pi}{\frac{1}{2} a \sqrt{2}} = \frac{\pi}{a} \sqrt{2}.$$

Brengt men de toonen $m = 2$ $n = 2$, $m = 3$ $n = 3$, enz. voort, dan verdeelt de plaat zich in 4, 9 etc. stukken, in ieder van welke de reeds beschreven klankfiguur teruggevonden wordt. Voor alle andere toonen is de klankfiguur theoretisch onbepaald; zoo komt b. v. met den trillingsvorm $m = 2$ $n = 3$ dezelfde toon overeen als met den trillingsvorm $m = 3$ $n = 2$, zoodat beide vormen tegelijk kunnen bestaan, en dus de overeenkomstige klankfiguren elkander wederkeerig kunnen wijzigen. De resulterende figuur is dan natuurlijk afhankelijk van de betrekkelijke intensiteit en het onderscheid in phase van beide zamenstellende trillingsvormen; de vergelijking voor f zal dan zijn

$$f = \delta \cos \frac{2\pi}{a} x \cos \frac{3\pi}{a} y + \varepsilon \cos \frac{3\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{a} x,$$

waarin ϑ en ε willekeurige constanten voorstellen, een uitdrukking, die, zooals men ziet, zoowel aan de oorspronkelijke differentiaalvergelijking als aan de grenswaarden voldoet.

Bij de figuren, die men in de werkelijkheid verkrijgt, verdwijnt evenwel een groot deel van die onbepaaldheid, daar de zamenstellende trillingsvormen onder dezelfde omstandigheden ontstaan, en dus in het algemeen van gelijke intensiteit en phase zullen zijn. Gebruikt men b. v. een buis, waarvan de toon overeenkomt met den toon $m = 2$

$n=0$ van de luchtplaat, en brengt men dien eigentoon der plaat voort, terwijl men de opening van de bedekkende glasplaat het middelpunt van het vierkant doet innemen, dan is er geen reden waarom de trillingsvormen $m=2$ $n=0$ en $m=0$ $n=2$, die nu te gelijk ontstaan, niet dezelfde intensiteit en phase zullen hebben; men vindt dan ook de figuur, die men theoretisch kan afleiden uit de vergelijking

$$f=A\left(cos\frac{2\pi}{a}x+cos\frac{2\pi}{a}y\right).$$

Diezelfde figuur kan ook gemakkelijk uit de figuur van den trillingsvorm $m = 2$ $n = 2$ afgeleid worden. Men merke daartoe op, dat bij dien vorm de snelheden der luchtdeeltjes, die op een diagonaal liggen, in de rigting van dien diagonaal vallen, zoodat de figuur niet verandert wanneer men langs den diagonaal een vasten wand plaatst. Beschrijft men nu met den diagonaal als zijde een nieuw vierkant, en voltooit men de klankfiguur, die nu voor een vierde gedeelte van dit nieuwe vierkant bekend is, dan heeft men de figuur van de luchtplaat met de zijde $a\sqrt{2}$ voor den toon, waarvoor $q=\frac{\pi}{a}\sqrt{2^2+2^2}$, dus stellende $a\sqrt{2}=a'$, $q=\frac{\pi}{a'}\sqrt{2^2+0^2}$; het is dus voor de nieuwe luchtplaat de toon (2 0). Analytisch is dezelfde transformatie deze: men stelle in $f=cos\frac{2\pi}{a}x\,cos\frac{2\pi}{a}y$, $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x'-y')$ en $y=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x'+y')$, wat dus een transformatie op nieuwe regthoekige assen is; dan wordt de vergelijking:

$$f = \cos \frac{2\pi}{a\sqrt{2}} x' + \cos \frac{2\pi}{a\sqrt{2}} y'.$$

Deze vergelijking geeft de uitdrukking van f voor den toon (2, 0) van een vierkante luchtplaat met de zijde $a\sqrt{2}$; zij voldoet aan de differentiaalvergelijking en aan de voorwaarden

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \text{ voor } x' = 0 \text{ en } x' = a\sqrt{2}$$

en
$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \text{ voor } y' = 0 \text{ en } y' = a\sqrt{2}.$$

Door de transformatie kan evenwel de figuur zelve niet veranderd zijn; zij is slechts in stand veranderd.

Zoeken wij nu de vergelijking van de reeds meermalen genoemde rijen [1], waarin het poeder zich schikt. Daar deze rijen, zooals reeds gezegd is, steeds loodregt op de rigting der beweging staan, moeten zij stukken zijn van lijnen, die voldoen aan de partieele differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{of:} \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

zoodat hun vergelijking is:

$$f = const.$$

In alle punten dus, die tot een zelfden kring behooren, zooals die door de rijen aangegeven worden, is de verdigting, dus ook de drukking, op ieder tijdstip der beweging dezelfde.

---

[1] In het duitsch noemt men ze "Rippungen"; ik heb dit woord niet anders weten te vertalen.

Het komt mij voor, dat deze omstandigheid kan dienen om het bestaan van die rijen te verklaren: want zij vormen als het ware muurtjes, die gedurende de beweging aan beide zijden een verschillende drukking ondervinden; alleen wanneer het verschil in drukking over hun geheele lengte dezelfde is, kunnen zij blijven bestaan; in het tegenovergestelde geval moeten zij noodzakelijk vernield worden. Wanneer nu oorspronkelijk het poeder gelijkelijk over de onderste plaat verdeeld is, zal ten gevolge van de luchtbeweging die poederlaag hier en daar gescheurd worden en dan een soort van netwerk vormen, waarvan alleen die stukken kunnen blijven bestaan, die loodregt op de rigtingen der beweging staan. Zulke rijen, eens ontstaan zijnde, kunnen nu wel dikker, maar niet dunner worden, daar het poeder, dat zich tusschen twee rijen bevindt, langzamerhand tegen deze aangedreven zal worden en dan gestuit wordt, terwijl de korrels, die reeds deel uitmaken van zulk een muurtje, elkander wederkeerig beschutten.

Men merke nog op, dat het feit van het ontstaan der rijen in luchtplaten niet op zich zelf staat; men kan het in verschillende gevallen waarnemen, waar lucht of een vloeistof zich over een laag kleine ligchaampjes heen beweegt. Zoo zal b. v., wanneer men den bodem van een met water gevulden bak met een laagje zand bedekt, en de bak heen en weêr beweegt, zoodat het water eene gelijkmatige schommelende beweging aanneemt, het zand zich op dergelijke rijen schikken, als die wij bij de luchtplaat waarnemen;

daar zij dan natuurlijk veel langzamer ontstaan, kan men dan tevens zien, hoe zich eerst het zand tot een netwerk schikt, waaruit zich dan vervolgens de rijen op de boven beschreven wijze vormen. Het schijnt mij toe, dat de golvende gedaante, die het zand van den zeeoever na den vloed vertoont, en de streepsgewijze schikking der wolken, waarbij de strepen loodregt op de bewegingsrigting staan, een schikking die men dikwijls kan waarnemen, geheel analoge verschijnselen zijn.

Dat in de luchtplaat de rijen niet overal even sterk optreden, en op vele plaatsen, met name op de knoopen, geheel ontbreken, meen ik dat zeer goed verklaard kan worden door de ongelijke verdeeling der *gemiddelde* drukking, gelijk ik boven heb trachten aan te toonen.

Ten bewijze dat hetzelfde beginsel ook voor andere dan vierkante luchtplaten kan toegepast worden, diene een korte theorie der cirkelvormige luchtplaten.

V.

CIRKELVORMIGE LUCHTPLATEN.

Om de vergelijking van het snelheidspotentiaal te vinden voor een luchtplaat, waarvan de begrenzing een cirkelomtrek is, moet de partieele differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$$

op poolcoördinaten getransformeerd worden. De substitutie: $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ geeft:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \right).$$

Stelt men nu $\varphi = R \Theta \mathrm{T}$, waarbij R, Θ en T resp. functien van r, ϑ en t voorstellen, dan ziet men dat een functie van dien vorm aan de vergelijking voldoet, wanneer

1) $$\frac{d^2 \mathrm{T}}{dt^2} + q^2 c^2 \mathrm{T} = 0$$

2) $$\frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + n^2 \Theta = 0$$

3) $$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(q^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R,$$

waarbij q en n voorloopig willekeurige constanten voorstellen. Men overtuigt zich daarvan gemakkelijk door bovenstaande vergelijkingen naar volgorde te vermenigvuldigen met $-\frac{R\Theta}{c^2}$, $\frac{R\mathrm{T}}{c^2}$ en $\Theta\,\mathrm{T}$, en ze vervolgens bij elkander op te tellen; de oorspronkelijke differentiaalvergelijking komt dan terug.

Daar T een periodische functie van t moet zijn, is:

1^a) $$\mathrm{T} = \cos q\,c\,t.$$

De vergel. 2) geeft:

2^a) $\Theta = \cos n\,\vartheta$, welke uitdrukking voldoet aan de voorwaarde $\varphi(2\pi) = \varphi(0)$, wanneer n een geheel getal is.

De vergel. 3) kan geïntegreerd worden door de methode der onbepaalde coëfficienten; men vindt dan als particulier integraal:

3^a) $$R = A\,r^n\left[1 - \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^2}{1.\,n+1} + \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^4}{1.\,2 \ldots (n+1)(n+2)} - \ldots\ldots\right].$$

In het algemeene integraal wordt R oneindig voor $r = 0$, zoodat dit, als met den aard van het vraagstuk in strijd zijnde, verworpen moet worden. Nu moet nog voldaan worden aan de voorwaarde $\frac{dR}{dr} = 0$ voor $r = 1$, wanneer wij den straal van de luchtplaat gelijk aan de eenheid nemen. Hierdoor is een vergelijking gegeven tusschen q en n.

Deze vergelijking heeft voor iedere waarde van n een oneindig aantal bestaanbare wortels, die allen van elkander verschillend zijn, zoodat bij verschillende waarden van n niet dezelfde waarde van q kan behooren. Bourget heeft dit bewezen [1] voor de vergelijking $R = 0$, en uit zijn beschouwing kan hetzelfde ten opzigte van de vergelijking $\frac{dR}{dr} = 0$ afgeleid worden; iedere waarde van q bepaalt een der eigentoonen van de luchtplaat. Stelt men zulk een waarde in de vergelijking in plaats van q, dan is $\varphi = R\,\Theta\,\mathrm{T}$ het snelheidspotentiaal voor den overeenkomstigen eigentoon.

De ligging der knoopen is bepaald door de vergelijkingen $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$ en $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = 0$, welke zich laten splitsen in de beide volgende stellen:

$$R = 0 \text{ en } \Theta = 0$$

en

$$\frac{dR}{dr} = 0 \text{ en } \frac{d\Theta}{d\vartheta} = 0.$$

De punten, die door het eerste stel bepaald worden, zijn dubbele knoopen, daar in die punten $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$; het tweede stel vergelijkingen bepaalt de enkelvoudige knoopen.

Men ziet dat beide soorten van knoopen gegeven zijn als snijpunten van een groep concentrische cirkels en een bundel stralen, en tevens dat de enkele en dubbele knoopen regelmatig met elkander afwisselen; zoodat, wanneer op een cirkel of straal enkelvoudige knoopen liggen, op den volgenden dubbele gelegen zijn.

---

[1] Bourget, Théorie der membranes circulaires. Annales de l'École Normale, Tome III.

Verder heeft de omstandigheid, dat bij twee verschillende waarden van n nimmer dezelfde waarde van q kan behooren, ten gevolge, dat bij een bepaalden toon nooit twee verschillende trillingsvormen kunnen bestaan, zoodat bij cirkelvormige luchtplaten de klankfiguren altijd geheel bepaald zijn, wat wij gezien hebben dat bij regthoekige niet het geval is.

In plaats van uit te gaan van een bepaalde luchtplaat, kan men ook van een bepaalden toon uitgaan en den straal der plaat voorloopig onbepaald laten; men kan b. v. $q = 1$ stellen en vervolgens iederen cirkel, waarvan de straal voldoet aan de vergelijking $\frac{dR}{dr} = 0$, als begrenzing aannemen. Wij zullen nu dien weg volgen.

Beschouwen wij R als ordinaat en r als abscis van een kromme lijn, dan kan de vergelijking 3^a) geconstrueerd worden. [1] Beschrijft men, dit gedaan zijnde, met den oorsprong der coördinaten als middelpunt, cirkels, die door de punten gaan waar de kromme lijn de as snijdt, en evenzoo cirkels door die punten der as, voor welke $\frac{dR}{dr} = 0$, dan kan iedere cirkel der laatste groep als de begrenzing van een luchtplaat beschouwd worden; op alle cirkels van dezelfde groep, die binnen de aangenomen begrenzing liggen, liggen de enkele knoopen; de dubbele knoopen liggen op de cirkels van de andere groep.

---

[1] Zie voor den vorm dezer lijn: Riemann, Partielle Differentialgleichungen, § 97.

Het is gemakkelijk de stralen, waarvoor $\cos n\vartheta = 0$ (op welke dus de dubbele knoopen liggen), en die voor welke $\sin n\vartheta = 0$, (die de enkele knoopen bevatten) te construeren.

Verder heeft men

$$4\,P = \left[R^2 - \left(\frac{dR}{dr}\right)^2\right]\cos^2 n\vartheta - \frac{n^2\,R^2}{r^2}\,\sin^2 n\vartheta\,;$$

dus zijn de punten van evenwigt gegeven door de vergelijkingen:

$$2\,\frac{\delta P}{\delta r} = \frac{dR}{dr}\left(R - \frac{d^2R}{dr^2}\right)\cos^2 n\vartheta - \frac{n^2 R}{r^2}\left(\frac{dR}{dr} - \frac{R}{r}\right)\sin^2 n\vartheta = 0$$

$$4\,\frac{dP}{d\vartheta} = \left[\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 - R^2\left(1 + \frac{n^2}{r^2}\right)\right] n \sin 2n\vartheta = 0.$$

Als punten van evenwigt vindt men dus vooreerst de knoopen, daar aan bovenstaande vergelijkingen voldaan wordt door $R = 0$ en $\cos n\vartheta = 0$,

en door $\frac{dR}{dr} = 0$ en $\sin n\vartheta = 0$.

Wij weten reeds dat het evenwigt in de knoopen wankelbaar is.

Vervolgens is er evenwigt in de punten, gegeven door:

$$\cos n\vartheta = 0 \text{ en } \frac{dR}{dr} = \frac{R}{r}\,.$$

De ligging dezer punten kan men vinden, door uit het middelpunt raaklijnen te trekken aan de kromme lijn, die de functie R voorstelt; wanneer men dan met de abscissen der raakpunten als stralen cirkels beschrijft, die den oorsprong der coördinaten tot middelpunt hebben, dan zijn de snijpunten van die cirkels met de stralen der dubbele knoopen de gezochte punten. Een van die punten ligt, wanneer men van het middelpunt uitgaat, tusschen een cirkel der dubbele knoopen en een der enkele, en nadert tot dezen laatste meer en meer, naarmate het verder van het middelpunt verwijderd is.

In de derde plaats is er evenwigt in de punten, die gegeven zijn door de vergelijkingen:

$$\sin n\vartheta = 0, \qquad R = \frac{d^2R}{dr^2}.$$

Deze punten liggen op de stralen der enkele knoopen, tusschen de cirkels der enkele en die der dubbele knoopen, wanneer men wederom van het middelpunt uitgaat, en naderen meer en meer tot deze laatsten, naarmate zij verder van het middelpunt verwijderd zijn.

In de beide soorten van punten, die wij het laatst behandeld hebben, is het evenwigt standvastig, gelijk door de beschouwing der tweede differentiaalquotienten van P gevonden kan worden.

Eindelijk is er evenwigt in de punten, die te gelijkertijd voldoen aan de vergelijkingen

$$\left[\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 - R^2\left(1 + \frac{n^2}{r^2}\right)\right] = 0 \quad \text{en} \quad \frac{dP}{dr} = 0.$$

In deze punten is het evenwigt in sommige rigtingen wankelbaar en in andere standvastig, daar in hen $\frac{d^2P}{d\vartheta^2} = 0$.

Daar zij in de klankfiguren geen bijzondere kenmerken vertoonen, zullen wij ze niet verder onderzoeken.

Na het aangevoerde is het nu niet moeijelijk na te gaan, welke de klankfiguur van een cirkelvormige luchtplaat zijn moet. Kiezen wij tot voorbeeld den tweeden toon, terwijl $n = 2$.

Op een cirkel, waarvan de straal ongeveer de helft van den straal der luchtplaat is, liggen vier enkele knoopen; die knoopen zijn door kringen omgeven, die het dikst zijn in de punten waar zij elkander raken (dat zijn de punten die op de stralen der dubbele knoopen gelegen zijn), en in de punten, die het digtst bij den rand der luchtplaat liggen (deze punten liggen op de zelfde stralen als de enkelvoudige knoopen). In iedere kringengroep liggen dus drie punten, waar een ophooping van poeder plaats heeft. Eindelijk zijn er nog kringen om de vier randknoopen; in deze zijn slechts vier nieuwe ophoopingen niet ver van den rand, op de stralen der dubbele knoopen. Men ziet dat zulke dubbele knoopen te herkennen zijn, doordat zij besloten zijn tusschen vier kringen, die naar den dubbelen knoop de convexe zijden toekeeren, en dat het middelpunt der plaat zulk een dubbele knoop is.

Neemt men de proef op de reeds bij de regthoekige luchtplaten beschreven wijze, dan vindt men werkelijk de figuur, die door de theorie gevorderd wordt; alleen de kringen om de randknoopen zijn minder duidelijk.

Kiest men een andere waarde voor n en een hoogeren toon, dan verkrijgt men een dergelijke figuur met meer sectoren en meer cirkels, waarop knoopen liggen.

Het geval $n = 0$ geeft geen *knoopen*, maar *knooplijnen*, evenals een membraan; Semen Lycopodii poeder schikt zich dan in concentrische cirkels om het middelpunt der plaat; dubbele knoopen ontbreken natuurlijk. Evenzoo treden in dit geval lijnen van evenwigt in plaats van punten op; dus schikt zich ook kurkvijlsel in concentrische kringen, die niet ver van de buiken verwijderd zijn.

Vermits het meer gebruikelijke teeken in de gebezigde lettersoort ontbrak zijn de partiëele differentialen met een ∂ moeten gezet worden, wat trouwens hier geen verwarring met variatieteekens kon geven.

STELLINGEN.

I.

De verklaring, die Challis geeft van de aantrekkingsverschijnselen door luchttrillingen veroorzaakt, vindt een grooten steun in de resultaten, die de beschouwing van de klankfiguren der luchtplaten heeft opgeleverd.

II.

Bij de vorming van die figuren speelt de gemiddelde digtheid der lucht gedurende de beweging een groote rol.

III.

De betrekking tusschen digtheid en drukking, die uitgedrukt wordt door de vergelijking der adiabatische lijn, voert in de theorie van de beweging der gassen evenmin tot volkomen juiste uitkomsten als de meer gebruikelijke.

IV.

Het bewijs van de hydrodynamische stelling van Lagrange, dat de uitdrukking $udx + vdy + wdz$ een volledig differentiaal blijft, wanneer zij het voor een oogenblik der beweging is, zooals dat gegeven is in Riemann's "Partielle Differentialgleichungen" § 101, is valsch.

V.

Teregt zegt Edlund: Die Ordnung der Metalle in der elektromotorischen und thermoëlektrischen Reihe ist vollkommen dieselbe.

Pogg. Ann. Bd. 143. pag. 562.

VI.

De wijze waarop Bezold de werking van den Elektrophoor verklaart, verdient de voorkeur boven de oudere theorie van Riess.

Pogg. Ann. Bd. 143.

VII.

Bij metingen met een galvanometer, verdient, ter verkrijging van astasie, het gebruik van astatische naalden de voorkeur boven dat van een vasten magneet.

VIII.

De theorie van Lommel verklaart de fluorescentie niet.

IX.

Nörrenberg's elementair bewijs van de stelling, dat het trillingsvlak van een lichtstraal, die door een toermalijnplaat is gepolariseerd, evenwijdig is met de krystallographische hoofdas, is onvoldoende.

Müllers Physik. I. pag. 805.

X.

Het is niet waarschijnlijk dat actieve chloor een grooter volumen inneemt dan niet-actieve.

XI.

Ten onregte zegt Beer, dat, wanneer een regte lijn zoo met elektriciteit belegd wordt, dat de digtheid evenredig is aan den afstand tot een der uiteinden van de lijn, de potentiaalfunctie in dat uiteinde onbepaald is.

Elektrostatik pag. 35.

XII.

De beantwoording der vraag, hoe het komt, dat wij regt zien, terwijl de beelden op het netvlies omgekeerd staan, ligt buiten het gebied der natuurwetenschap.

XIII.

De theorie van Zöllner ter verklaring van de periodiciteit en de heliographische verbreiding der zonnevlekken is onvoldoende.

XIV.

Het bewijs volgens Durège van de stelling, dat $\varphi(z)$ in a doorloopend is, wanneer $(z-a)\varphi(z)$ voor $z=a$ tot nul nadert, is onjuist.

Theorie der Functionen einer complexen Grösse pag. 107.

XV.

Het is verkeerd om, bij het zamenstellen van een leerboek der physika, zich te binden aan de historische volgorde der feiten.

XVI.

Het onderwijs in de hoogere analysis moet van de beschouwing der bepaalde integralen uitgaan.

XVII.

Evenwijdige lijnen mogen niet bepaald worden als lijnen, die, in hetzelfde platte vlak gelegen, elkander, hoever ook verlengd, nimmer zullen snijden.

XVIII.

Wie in het vervolg over spontane generatie proeven wil doen, zal moeten zoeken niet naar infusoriën, maar naar moneren of hunne naaste verwanten.

Isis. N°. 17.