De Dirac vergelijking

Klassiek $\longrightarrow$ Quantum: $\left.\begin{array}{l} E \to +i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ p_j \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j} \end{array}\right\} \Rightarrow p_\mu \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = -i\hbar\partial x_\mu$

Klassieke mechanica: $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\left(+V(\vec{x})\right) \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^{\,2} + \left(V(\vec{x})\right) \longrightarrow$ Schrödinger vgl

Speciale relativiteit: $E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4 \longrightarrow$??? Dirac vergelijking!

Idee Dirac: maak een soort Schrödinger vgl (eerste orde in afgeleide naar t). Probeer:

$$E = \alpha^i p_i c + \beta mc^2$$

$$\Rightarrow E^2 = \alpha^i p_i c \alpha^j p_j c + \underbrace{\alpha^i p_i c \beta mc^2 + \beta mc^2 \alpha^j p_j c} + \beta^2 m^2 c^4 \equiv \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4$$

Alleen mogelijk voor matrices!

$$\tfrac{1}{2}\left\{\alpha^i, \alpha^j\right\} = \delta_{ij}\mathbb{I} \qquad \left\{\alpha^i, \beta\right\} = 0 \qquad \beta^2 = \mathbb{I}$$

Verschillende oplossingen mogelijk, bijvoorbeeld: $\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}$

Def: $\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha^i \quad \Rightarrow \quad E = \gamma^0\gamma^i p_i + \gamma^0 mc^2 \longrightarrow i\hbar\partial_t = -i\hbar c\gamma^0\gamma^i\partial_i + \gamma^0 mc^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 = -i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + \mathbb{I}_4 mc}$$

Dirac vgl! Werkt op golffunctie $\Psi(x)$ (= vektor met 4 componenten).

2 voor spin x 2 voor deeltjes/anti-deeltjes

Oplossingen zijn o.a. vlakke golven. Deze kunnen negatieve energie hebben! Dit zijn de anti-deeltjes. Dirac vatte deze op als ‘gaten’ in een zee van gewone deeltjes met negatieve energie. Een gat is dus tegengesteld geladen en heeft positieve energie: een anti-deeltje!