Exercise 1: Prove how conservation of angular momentum follows from invariance under rotations. Do this by first demonstrating that a rotation with an angle $|\vec{\omega}|$ around an axis $\vec{\omega}$ gives a displacement of $\delta\vec{r}_{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{(i)}$.

Exercise 2: Why is α_1 dropping out in the change of the surface tension, as well as the Coulomb energy? (Hint: show that α_1 is a variation in the overall position, that does not contribute to the changes in the form.) Check that for the ellipse $\alpha_2 = \epsilon$ and demonstrate that the result in the book agrees with the formula of Bohr and Wheeler.

Exercise 3: Show that EqPN.(4.17) from the book, $dE' = v'dp'$, is valid both in the classical theory as well as in the relativistic theory.

Exercise 4: The Rosenbluth equation is made plausible by demonstrating that $L_{\mu\nu}(P, P') = K_1(q^2)(-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu/q^2) + K_2(q^2)(P_\mu + \frac{1}{2}q_\mu)(P_\nu + \frac{1}{2}q_\nu)/(M^2c^2)$, met $K_1(q^2) = -q^2$ en $K_2(q^2) = 4M^2c^2$ (form factor of a point particle). Demonstrate this[1].
(Extra: give a derivation of the Rosenbluth equation.)

Exercise 5: Show that Eq.(7.64) can also be written as

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{F_1(x)}{2M}\left(\frac{\alpha\hbar}{E\sin(\theta/2)}\right)^2\left[1 + \frac{2EE'}{(E-E')^2}\cos^2(\theta/2)\right]. \tag{7.66}$$

(Extra: Prove that EqPN.(7.7) indeed follows from Eq.(7.60) and Eq.(7.61).)

Exercise 6: Starting from the fact that *all* quarks (in units of e) have a charge $-1/3$(mod 1) (the up quark has for example a charge $2/3 = -1/3 + 1$), prove that baryons with integer charge consists of clusters of three quarks (hadrons) and/or a quark and an anti-quark (mesons).

Exercise 7: i) Use lepton universality (§9.1) to demonstrate that the contribution of the Z^0-resonance of $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ is roughly half that of $e^+ + e^- \to \nu + \bar{\nu}$.
ii) At the decay of a ϕ particle in two kaons the gluon could also be exchanged by the s anti-quark. Draw one of the processes with the appropriate colors. Work this also out for the decay in to pions, in which all colors and the glouns are properly represented.

Exercise 8: Why is it that for low energies Eq.(11.76) turns into $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = 2\frac{(4\pi\alpha_W)^2}{M_W^4c^4} \times (p_{\nu_\mu} \cdot p_{e^-})(p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-})$. If we neglect the masses of the electron and the neutrino we have as before $p_{\nu_\mu} \cdot p_{e^-} = 2E^2/c^2 = \frac{1}{2}s/c^2$, but this is no longer equal to $p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-}$. Show first that $\vec{p}\,' = \vec{p}_{\mu^-} = -\vec{p}_{\nu_e}$ and $|\vec{p}\,'| = E_{\nu_e}/c$, while $E_\mu^2 = E_{\nu_e}^2 + m_\mu^2c^4$. Why is it valid that $E_{\nu_e} + E_\mu = |\vec{p}_{\nu_\mu}|c + |\vec{p}_{e^-}|c = 2|\vec{p}|c = 2E$. Demonstrate now that $p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-} = 2EE_{\nu_e}/c^2$ and $E_{\nu_e} = E(1 - (\frac{1}{2}m_\mu c^2/E)^2) = E(1 - m_\mu^2c^4/s)$. Use finally Eq.(10.67) to find Eq.(11.79).

[1] One can also first check that $q^\mu L_{\mu\nu}(P, P') = 0$, such that $L_{\mu\nu}$ must be of the general form in Eq.(5.56). Since $L_{\mu\nu}(P, P')$ must be quadratic in its momenta, $K_1(q^2)$ must be linear and $K_2(q^2)$ must be independent of q^2. On the ground of dimensions $K_1(q^2) = Aq^2$ and $K_2(q^2) = BM^2c^2$, with A en B constants. Argue now that $A = -1$ and $B = 4$.

Mott and the Golden Rule

In this exercise we will calculate the cross section for scattering of an electron on a fixed target (for example a heavy nucleus, with the recoil of the nucleus neglected), so the cross section of Mott. Our starting point is EqPN.(5.23) from the book,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2(\hbar c)^4} |\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle|^2, \tag{1}$$

where the matrix element is given by

$$\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle = e\int \psi_f^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})\psi_i(\vec{x})d^3x.$$

Here the electric potential is $\phi(\vec{x}) = A_0(\vec{x})$, with $\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{Ze}{\varepsilon_0}\delta_3(\vec{x})$ for a point charge (see EqPN.(5.30) of the book). In case of the electron, the wave function $\psi(\vec{x})$ is a standing four component vector and $\psi^\dagger(\vec{x})$ a lying complex conjugate vector. If we use Eq.([5.]39-41) of the extra text, then

$$\psi_i(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} u^{(a)}(\vec{p}), \qquad \psi_f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\,'\cdot\vec{x}/\hbar} u^{(b)}(\vec{p}\,').$$

We stress that in an infinite volume V needs to be replaced by $(2\pi)^3$, and that we take $t = 0$, such that $\psi(\vec{x})$ is a time independent solution of the Dirac equation, $(\alpha^i p_i c + \beta mc^2)\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$, with positive energy, $E = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$. The labels (a) and (b) give the spin of the ingoing and outgoing electrons.
a) Show that similarly to EqPN.(5.31-32) in the book

$$\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle = \frac{4\pi\alpha\hbar^3 cZ}{\vec{q}^{\,2}V} f_{ba}(\vec{q}), \qquad f_{ba}(\vec{q}) = u^{(b)}(\vec{p}\,')^\dagger u^{(a)}(\vec{p}) \equiv \sum_{\ell=1}^{4} u_\ell^{(b)}(\vec{p}\,')^* u_\ell^{(a)}(\vec{p}).$$

This is for the case of scattering on point charges. If this charge is spread out, one also needs to multiply with the usual form factor, $F(\vec{q})$ (see EqPN.(5.32) in the book). The "form" information of the electron, that is the dependence on its spin, is described by f_{ba}. Here we only consider the case of an unpolarized beam of electrons, both with spin-up and down, that scatters on a target. We have to average EqPN.(5.23) (Eq.(1) above) over the incoming spins and sum over the outgoing spins.
b) Show that the unpolarized cross section is given by

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|c\vec{q}|^4}\left(\tfrac{1}{2}\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=1}^{2}|f_{ba}(\vec{q})|^2\right)|F(\vec{q})|^2.$$

Below we will show that

$$\tfrac{1}{2}\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=1}^{2}|f_{ba}(\vec{q})|^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2(\tfrac{1}{2}\theta). \tag{2}$$

Use this to show that we precisely obtain the Mott cross section, that is EqPN.(5.38) and EqPN.(5.41) from the book.

To prove Eq.(2) one could simply use Eq.([5.]40-41) of the extra text, but this is not recommended. In stead, there is a compact result (also called the Casimir result) for the summation over spin polarizations. We introduce the following 4×4 matrix

$$\Lambda_{k\ell}(\vec{p}) = \sum_{a=1}^{2} u_k^{(a)}(\vec{p}) u_\ell^{(a)}(\vec{p})^*.$$

c) Show now that

$$\tfrac{1}{2}\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=1}^{2}|f_{ba}(\vec{q})|^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{4}\Lambda_{k\ell}(\vec{p}\,')\Lambda_{\ell k}(\vec{p}) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda(\vec{p}\,')\Lambda(\vec{p})\Big),$$

where Tr stands for the trace of a matrix.
d) Show with Eq.([5.]40-41) from the extra text that

$$\Lambda(\vec{p}) = \frac{1}{2p_0(p_0+mc)}(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)\Lambda(\vec{0})(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)^\dagger,$$

Of course, the $\dagger$ means the hermitian conjugate of a 4×4 matrix. We can calculate $\Lambda(\vec{0})$ explicitly, because $u^{(a)}(\vec{0}) = u_0^{(a)}$ as defined in Eq.([5.]41) has a simple form. Use this to show that $\Lambda(\vec{0}) = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \beta) = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \gamma^0)$.
e) Now we want to demonstrate that $\Lambda(\vec{p})$ takes a remarkable simple form,

$$\Lambda(\vec{p}) = \frac{1}{2p_0}(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)\gamma^0. \tag{3}$$

We collect step by step the necessary ingredients:
i) Use the definitions in Eq.([5.]38) (or Eq.([5.]37)) of the extra text to show that α^i and $\beta(=\gamma^0)$ are hermitian, $(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i$ and $\beta^\dagger = \beta$.
ii) Use the fact that β and α^i anti-commute to demonstrate that γ^i is anti-hermitian, $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$. Prove also that $\gamma^i\gamma^i = -\mathbb{1}_4$ (and $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{1}_4$).
iii) Show also that γ^i and γ^0 mutually anti-commute, $\gamma^i\gamma^0 + \gamma^0\gamma^i = 0$ and conclude that $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, such that

$$\Lambda(\vec{p}) = \frac{1}{4p_0(p_0+mc)}(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)(\mathbb{1}_4 + \gamma^0)\gamma^0(\gamma^\nu p_\nu + \mathbb{1}_4 mc)\gamma^0,$$

where we note that $(\mathbb{1}_4 + \gamma^0)\gamma^0 = (\mathbb{1}_4 + \gamma^0)$.
iv) We split the computation of $(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)(\mathbb{1}_4 + \gamma^0)(\gamma^\nu p_\nu + \mathbb{1}_4 mc)$ in two parts:
Show that for part A$=(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)(\gamma^\nu p_\nu + \mathbb{1}_4 mc) = (\gamma^\mu p_\mu)^2 + 2mc\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 m^2c^2$ and for part B$=(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)\gamma^0(\gamma^\nu p_\nu + \mathbb{1}_4 mc) = -(\gamma^\mu p_\mu)^2\gamma^0 + (\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)(\gamma^0\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^0)p_\nu + m^2c^2\gamma^0$ is found. Show then that $(\gamma^0\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^0)p_\mu = 2p_0\mathbb{1}_4$ and $(\gamma^\mu p_\mu)^2 = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)p_\mu p_\nu = \mathbb{1}_4(p_0^2 - \vec{p}^{\,2}) = \mathbb{1}_4 m^2c^2$ and with that A+B$=2(p_0+mc)(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)$. Verify now the validity of Eq.(3).
f) To conclude, we calculate $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda(\vec{p}\,')\Lambda(\vec{p})\Big) = \frac{1}{8p'^0p^0}\mathrm{Tr}\Big((\gamma^\mu p'_\mu + \mathbb{1}_4 mc)\gamma^0(\gamma^\nu p_\nu + \mathbb{1}_4 mc)\gamma^0\Big)$, for which it is advantageous to introduce in addition to $p = (p_0; \vec{p})$ also $\tilde{p} = (p_0, -\vec{p})$. Verify that $\gamma^0\gamma^\mu p_\mu\gamma^0 = \gamma^\mu\tilde{p}_\mu$ and so $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda(\vec{p}\,')\Lambda(\vec{p})\Big) = \frac{1}{8p'^0p^0}\mathrm{Tr}\Big((\gamma^\mu p'_\mu + \mathbb{1}_4 mc)(\gamma^\nu\tilde{p}_\nu + \mathbb{1}_4 mc)\Big)$. Prove that $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu) = 0$ and that $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu p'_\mu\gamma^\nu\tilde{p}_\nu) = \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)p'_\mu\tilde{p}_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)p'_\mu\tilde{p}_\nu = 4(p'\cdot\tilde{p}) = 4(p'^0p^0 + \vec{p}\,'\cdot\vec{p})$, such that $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda(\vec{p}\,')\Lambda(\vec{p})\Big) = \frac{1}{2p'^0p^0}(p'^0p^0 + |\vec{p}\,'||\vec{p}|\cos\theta + m^2c^2) = 1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2(\frac{1}{2}\theta)$.

Extra opgave: Bewijs nu zelf eenvoudig hoe het behoud van impulsmoment volgt uit invariantie onder rotaties. Laat daartoe eerst zien dat een rotatie over een hoek $|\vec{\omega}|$ om een as met richting $\vec{\omega}$ aanleiding geeft tot $\delta\vec{r}_{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{(i)}$.

Extra opgave: Waarom valt α_1 volledig weg uit zowel de verandering in de oppervlaktespanning als in de Coulomb energie? (Hint: beredeneer dat α_1 niet zozeer een vormverandering geeft, maar een verplaatsing van het zwaartepunt.) Controleer dat voor de ellips $\alpha_2 = \epsilon$ en laat zien dat het gegeven resultaat in het boek klopt met de formule van Bohr en Wheeler.

Extra opgave: Laat zien dat EqPN.(4.17) in het boek, $dE' = v'dp'$, geldig is zowel in de klassieke theorie als in de relativistische theorie.

Extra opgave: De Rosenbluth formule kan aannemelijk gemaakt worden door te laten zien dat $L_{\mu\nu}(P,P') = K_1(q^2)(-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu/q^2) + K_2(q^2)(P_\mu + \frac{1}{2}q_\mu)(P_\nu + \frac{1}{2}q_\nu)/(M^2c^2)$, met $K_1(q^2) = -q^2$ en $K_2(q^2) = 4M^2c^2$ (de vormfuncties voor puntdeeltjes). Laat dit zien[2]. (Fakultatief: geef de afleiding van de Rosenbluth formule.)

Extra opgave: Laat zien dat Eq.(7.64) ook geschreven kan worden als

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{F_1(x)}{2M}\left(\frac{\alpha\hbar}{E\sin(\theta/2)}\right)^2\left[1 + \frac{2EE'}{(E-E')^2}\cos^2(\theta/2)\right]. \tag{7.66}$$

(Fakultatief: Bewijs dat EqPN.(7.7) inderdaad volgt uit Eq.(7.60) en (7.61)).

Extra opgave: Uitgaande van het feit dat *alle* quarks (in eenheden van e) een lading $-1/3(\mathrm{mod}\ 1)$ hebben (bedenk dat het up quark een lading $2/3 = -1/3 + 1$ heeft), bewijs dat heeltallige lading van de baryonen impliceert dat ze bestaan uit clusters van drie quarks (hadronen) en/of een quark en een anti-quark (mesonen).

Extra opgaven: i) Gebruik de lepton universaliteit (§9.1) om te laten zien dat de Z^0-resonante bijdrage aan de werkzame doorsnede voor $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ ongeveer de helft is van die voor $e^+ + e^- \to \nu + \bar{\nu}$.
ii) Bij het verval van het ϕ deeltje in twee kaonen kan men het gluon ook laten uitwisselen door het s anti-quark. Teken hiervoor zelf een van de mogelijke processen onder vermelding van de kleuren. Werk ook voor het verval in pionen een voorbeeld uit waarin alle kleuren en de gluonen correct zijn weergegeven.

Extra opgave: Waarom geldt bij lage energie dat Eq.(11.76) over gaat in $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = 2\frac{(4\pi\alpha_W)^2}{M_W^4c^4}(p_{\nu_\mu}\cdot p_{e^-})(p_{\nu_e}\cdot p_{\mu^-})$. Als we de massas van het electron en de neutrinos verwaarlozen geldt als eerder $p_{\nu_\mu}\cdot p_{e^-} = 2E^2/c^2 = \frac{1}{2}s/c^2$, maar dit is niet langer gelijk aan $p_{\nu_e}\cdot p_{\mu^-}$. Laat eerst zien dat $\vec{p}\,' = \vec{p}_{\mu^-} = -\vec{p}_{\nu_e}$ en $|\vec{p}\,'| = E_{\nu_e}/c$, terwijl $E_\mu^2 = E_{\nu_e}^2 + m_\mu^2c^4$. Waarom geldt $E_{\nu_e} + E_\mu = |\vec{p}_{\nu_\mu}|c + |\vec{p}_{e^-}|c = 2|\vec{p}|c = 2E$. Laat hiermee nu zien dat $p_{\nu_e}\cdot p_{\mu^-} = 2EE_{\nu_e}/c^2$ en dat $E_{\nu_e} = E(1 - (\frac{1}{2}m_\mu c^2/E)^2) = E(1 - m_\mu^2c^4/s)$. Gebruik tenslotte Eq.(10.67) om het resultaat uit Eq.(11.79) te vinden.

[2] In plaats van uitschrijven kun je ook eerst controleren dat $q^\mu L_{\mu\nu}(P,P') = 0$, zodat $L_{\mu\nu}$ noodzakelijkerwijze de algemene vorm van Eq.(5.56) moet hebben. Omdat $L_{\mu\nu}(P,P')$ kwadratisch in de impulsen is, moet dus $K_1(q^2)$ linear in, en $K_2(q^2)$ onafhangelijk van q^2 zijn. Op grond van dimensies $K_1(q^2) = Aq^2$ en $K_2(q^2) = BM^2c^2$, met A en B constanten. Beredeneer tenslotte dat $A = -1$ en $B = 4$.

Mott en de Golden rule

In deze opgave berekenen we de werkzame doorsnede voor verstrooiing van een electron aan een vaste puntlading (bijv. een zware kern, dus onder verwaarlozing van de terugstoot), dus de werkzame doorsnede van Mott. Ons uitgangspunt is verg.(5.23) in het boek,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2(\hbar c)^4}|\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle|^2, \tag{1}$$

waarbij het matrixelement gegeven wordt door

$$\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle = e\int \psi_f^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})\psi_i(\vec{x})d^3x.$$

Hierin is $\phi(\vec{x}) = A_0(\vec{x})$ de electrische potentiaal, met voor een puntlading $\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{Ze}{\varepsilon_0}\delta_3(\vec{x})$ (zie verg.(5.30) in het boek). In het geval van het electron is de golffunctie $\psi(\vec{x})$ een staande vector, met vier componenten, en $\psi^\dagger(\vec{x})$ een complex geconjugeerde liggende vector. Gebruiken we Eq.(5.39-41) van de aanvulling dan geldt

$$\psi_i(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}u^{(a)}(\vec{p}), \qquad \psi_f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}/\hbar}u^{(b)}(\vec{p}'),$$

waarbij we opmerken dat in een oneindig volume V vervangen wordt door $(2\pi)^3$, en dat we $t = 0$ hebben genomen zodat $\psi(\vec{x})$ een tijdsonfahankelijke oplossing is van de Dirac Hamiltoniaan, $(\alpha^i p_i c + \beta mc^2)\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$ met positieve energie $E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$. De labels (a) en (b) geven aan wat de spin van resp. het ingaande en uitgaande electron is.
a) Laat zien dat in analogie met verg.(5.31-32) in het boek

$$\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle = \frac{4\pi\alpha\hbar^3 cZ}{\vec{q}^2V}f_{ba}(\vec{q}), \qquad f_{ba}(\vec{q}) = u^{(b)}(\vec{p}')^\dagger u^{(a)}(\vec{p}) \equiv \sum_{\ell=1}^4 u_\ell^{(b)}(\vec{p}')^* u_\ell^{(a)}(\vec{p}).$$

Dit is voor het geval van verstrooiing aan een puntlading. Als deze lading uitgespreid is dan moeten we nog met de gewoonlijke vormfactor $F(\vec{q})$ vermenigvuldigen (zie verg.(5.32) van het boek). In zekere zin beschrijft f_{ba} de "vorm" informatie van het electron, namelijk de afhankelijkheid van de spin. We bekijken hier het geval van een bundel ongepolariseerde electronen en een detector die geen onderscheid maakt naar spin. We moeten dan verg.(5.23) (Eq.(1) hierboven) middelen over de ingaande en sommeren over de uitgaande spins.
b) Laat zien dat de ongepolariseerde werkzame doorsnede gegeven wordt door

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2E'^2}{|c\vec{q}|^4}\left(\tfrac{1}{2}\sum_{a=1}^2\sum_{b=1}^2|f_{ba}(\vec{q})|^2\right)|F(\vec{q})|^2.$$

Hieronder gaan we aantonen dat

$$\tfrac{1}{2}\sum_{a=1}^2\sum_{b=1}^2|f_{ba}(\vec{q})|^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2(\tfrac{1}{2}\theta). \tag{2}$$

Gebruik dit om te laten zien dat we daarmee dan precies de werkzame doorsnede voor Mott, verg.(5.38) en verg.(5.41) in het boek, hebben bewezen.

Om Eq.(2) te bewijzen zou je gewoon botweg Eq.(5.40-41) in de aanvulling kunnen gebruiken, maar dat is niet aan te bevelen. Het blijkt dat er een compact resultaat voor de sommatie over de spin polarisaties bestaat (ook wel de truc van Casimir genoemd). Daartoe introduceren we de volgende 4×4 matrix

$$\Lambda_{k\ell}(\vec{p}) = \sum_{a=1}^{2} u_k^{(a)}(\vec{p}) u_\ell^{(a)}(\vec{p})^*.$$

c) Laat zien dat hiermee

$$\tfrac{1}{2}\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=1}^{2} |f_{ba}(\vec{q})|^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{4} \Lambda_{k\ell}(\vec{p}\,')\Lambda_{\ell k}(\vec{p}) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda(\vec{p}\,')\Lambda(\vec{p})\Big),$$

waarin Tr staat voor het spoor van een matrix.
d) Laat m.b.v. Eq.(5.40-41) van de aanvulling zien dat

$$\Lambda(\vec{p}) = \frac{1}{2p_0(p_0+mc)}(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)\Lambda(\vec{0})(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)^\dagger,$$

De $\dagger$ staat hier uiteraard voor hermitisch conjugeren van de 4×4 matrix. We kunnen $\Lambda(\vec{0})$ expliciet berekenen doordat $u^{(a)}(\vec{0}) = u_0^{(a)}$ als gedefinieerd in Eq.(5.41) een simpele vorm heeft. Gebruik dit om te laten zien dat $\Lambda(\vec{0}) = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \beta) = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \gamma^0)$.
e) Nu willen we aantonen dat $\Lambda(\vec{p})$ een opmerkelijk eenvoudige vorm aanneemt,

$$\Lambda(\vec{p}) = \frac{1}{2p_0}(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)\gamma^0. \tag{3}$$

We vergaren stap voor stap hieronder de nodige identiteiten:
i) Gebruik de definities in Eq.(5.38) (of Eq.(5.37)) van de aanvulling om te laten zien dat α^i en $\beta(=\gamma^0)$ hermitisch zijn, $(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i$ en $\beta^\dagger = \beta$.
ii) Gebruik het feit dat β en α^i met elkaar anti-commuteren om te laten zien dat γ^i anti-hermitisch is, $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$. Bewijs ook dat $\gamma^i\gamma^i = -\mathbb{1}_4$ (naast $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{1}_4$).
iii) Laat ook zien dat γ^i en γ^0 onderling anti-commuteren, $\gamma^i\gamma^0 + \gamma^0\gamma^i = 0$ en concludeer dat $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, zodat

$$\Lambda(\vec{p}) = \frac{1}{4p_0(p_0+mc)}(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)(\mathbb{1}_4 + \gamma^0)\gamma^0(\gamma^\nu p_\nu + \mathbb{1}_4 mc)\gamma^0,$$

waarbij we opmerken dat $(\mathbb{1}_4 + \gamma^0)\gamma^0 = (\mathbb{1}_4 + \gamma^0)$.
iv) De berekening van $(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)(\mathbb{1}_4 + \gamma^0)(\gamma^\nu p_\nu + \mathbb{1}_4 mc)$ splitsen we in twee delen: Bewijs dat voor deel A$=(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)(\gamma^\nu p_\nu + \mathbb{1}_4 mc) = (\gamma^\mu p_\mu)^2 + 2mc\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 m^2c^2$ en voor deel B$=(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)\gamma^0(\gamma^\nu p_\nu + \mathbb{1}_4 mc) = -(\gamma^\mu p_\mu)^2\gamma^0 + (\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)(\gamma^0\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^0)p_\nu + m^2c^2\gamma^0$ gelden. Laat vervolgens zien dat $(\gamma^0\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^0)p_\mu = 2p_0\mathbb{1}_4$ en $(\gamma^\mu p_\mu)^2 = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)p_\mu p_\nu = \mathbb{1}_4(p_0^2 - \vec{p}^{\,2}) = \mathbb{1}_4 m^2c^2$ en daarmee dat deel A+B$=2(p_0 + mc)(\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc)$. Bewijs nu de geldigheid van Eq.(3).
f) Tot slot berekenen we $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda(\vec{p}\,')\Lambda(\vec{p})\Big) = \frac{1}{8p'^0p^0}\mathrm{Tr}\Big((\gamma^\mu p'_\mu + \mathbb{1}_4 mc)\gamma^0(\gamma^\nu p_\nu + \mathbb{1}_4 mc)\gamma^0\Big)$, waarvoor het nuttig is om naast $p = (p_0;\vec{p})$ ook $\tilde{p} = (p_0, -\vec{p})$ in te voeren. Ga na dat $\gamma^0\gamma^\mu p_\mu\gamma^0 = \gamma^\mu\tilde{p}_\mu$ en dus $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda(\vec{p}\,')\Lambda(\vec{p})\Big) = \frac{1}{8p'^0p^0}\mathrm{Tr}\Big((\gamma^\mu p'_\mu + \mathbb{1}_4 mc)(\gamma^\nu\tilde{p}_\nu + \mathbb{1}_4 mc)\Big)$. Bewijs dat $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu) = 0$ en dat $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu p'_\mu\gamma^\nu\tilde{p}_\nu) = \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)p'_\mu\tilde{p}_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)p'_\mu\tilde{p}_\nu = 4(p'\cdot\tilde{p}) = 4(p'^0p^0 + \vec{p}\,'\cdot\vec{p})$, zodat $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda(\vec{p}\,')\Lambda(\vec{p})\Big) = \frac{1}{2p'^0p^0}(p'^0p^0 + |\vec{p}\,'||\vec{p}|\cos\theta + m^2c^2) = 1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2(\frac{1}{2}\theta)$.