Einstein's Relativiteitstheorie

Gastles voor 5-6 VWO klassen (met drie opgaven)

Prof. Pierre van Baal, Instituut-Lorentz voor Theoretische Natuurkunde, Universiteit Leiden

Webversie met extra verwijzingen: www.lorentz.leidenuniv.nl/vanbaal/SRT/vwo/

De relativiteitstheorie van Einstein is wellicht een van de meest tot de verbeelding sprekende theorieën uit de natuurwetenschappen. Het lijkt wel toverkunst dat we volgens de relativiteitstheorie bewegende klokken langzamer zien lopen en dat een tweelingbroer jonger terugkomt van een ruimtereis, of dat we een bewegende meetlat ingekort zien. Toch is dit alles het gevolg van een paar eenvoudige uitgangspunten. En van de wiskunde hebben we niet meer nodig dan de stelling van Pythagoras en wat eenvoudige algebra.

In het tweede deel laten we zien dat energie equivalent is met massa,

$$E = mc^2,$$

ongetwijfeld een van de meest bekende formules. Dat E voor energie staat, m voor massa en c voor lichtsnelheid is vrij algemeen bekend. Maar wat deze wet precies inhoudt, welke massa en welke energie bedoeld wordt, vergt wat meer inzicht. Met wat simpele mechanica en algebra kunnen we ook hier in de geheimen van de natuur doordringen.

In het derde deel laten we zien dat de massa van de snelheid afhangt. Dan begrijp je ook echt waarom niets sneller dan het licht kan. Dit is het lastigste deel.

In het laatste deel hebben we het ook nog heel kort over zwarte gaten. Om dit deel te volgen kun je deel II en III overslaan. De nodige voorkennis staat allemaal in deel I.

I: Tijd en Lengte

De eigenschappen van de lichtsnelheid spelen in dit alles een cruciale rol. De weg die het licht in één seconde aflegt is echter voor menselijke maatstaven gigantisch groot, namelijk driehonderd duizend kilometer, of wel driehonderd miljoen meter (als we heel precies willen zijn geldt $c = 299.793$ km/s). Het is in zo'n geval beter voor de tijd kleinere eenheden te nemen, zoals de milliseconde (éénduizendste seconde) of nog beter de microseconde, éénmiljoenste seconde. In 1 microseconde beweegt het licht nog steeds ongeveer 300 meter. Eigenlijk is de zogenaamde nanoseconde (éénmiljardste seconde) meer geschikt. In deze tijd legt het licht een afstand van 30 cm af. Dit maakt ook duidelijk dat de lichtsnelheid heel groot is in vergelijking met de snelheden waaraan de mens, zelfs in deze jachtige tijd, gewend is. Zo is de snelheid van het geluid ca. 330 m/s (dit noemt men ook wel Mach 1) al groot, maar valt in het niets ten opzichte van de snelheid waarmee de aarde om de zon beweegt, 30 km/s. Maar zelfs deze snelheid is nog steeds een factor tienduizend kleiner dan de lichtsnelheid. Bedenk dat dit zich verhoudt als de snelheid van een slak (10 m/h) tot die van een auto (100 km/h).

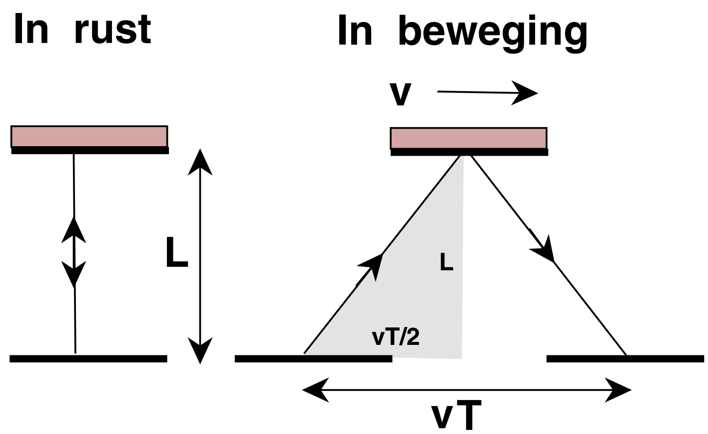
Dit is *de* reden waarom we in het dagelijks leven zo weinig rechtstreeks van de relativiteitstheorie van Einstein merken, en nog belangrijker, waarom het zo moeilijk voor ons is ons te verplaatsen naar een wereld waar de snelheden wél groot zijn en de effecten die Einstein voorspeld heeft wél makkelijk waarneembaar zijn. Einstein's uitgangspunten waren de volgende *waarnemingsfeiten*, geformuleerd in de drie postulaten van de relativiteitstheorie.

- **Relativiteitsprincipe**: Natuurkundige wetten zijn in alle stelsels (coördinaten en klok waarmee iemand zijn waarnemingen doet) hetzelfde.
- **Lichtpostulaat**: De lichtsnelheid in het luchtledige is in ieder intertiaal stelsel (een stelsel waar geen krachten op werken) hetzelfde.
- **Equivalentieprincipe**: In vrije val bewegen alle objecten met dezelfde versnelling.

Het laatste postulaat is alleen van belang als we ook de gravitatie willen beschrijven. Deze door Einstein ontwikkelde theorie van gravitatie staat ook bekend onder de naam *algemene relativiteitstheorie*.

Het lichtpostulaat is in feite een gevolg van een veel vroegere theorie, namelijk die van Maxwell. Hij bracht de electriciteit en het magnetisme in één theorie samen, het electromagnetisme. Maxwell liet zien hoe licht een electromagnetische golf is, waarbij afwisselend het magnetische veld verandert, daarbij door inductie een veranderend electrisch veld veroorzaakt, dat op zijn beurt weer een veranderend magnetisch veld genereert, enz. Uit de theorie van Maxwell volgde al dat de voortplantingssnelheid van het licht niet afhangt van de bewegingstoestand van de waarnemer, noch van de bewegingstoestand van de bron. Het zat er echter zo ingehamerd bij de natuurkundigen van de negentiende eeuw, dat golven zich door een medium voortplanten, en dat de beweging van de waarnemer ten opzichte van het medium opgeteld moet worden bij die van de golf in het medium, dat het lang geduurd heeft voordat het als zodanig werd onderkend. Daar was Einstein voor nodig.

We laten nu zien hoe uit het lichtpostulaat volgt dat we een bewegende klok langzamer zien lopen dan een stilstaande klok. Een klok is een mechanische constructie die twee opeenvolgende tijdstippen vastlegt, hetzij door de wijzers van de klok, cijfers op een display, of ieder ander natuurkundig verschijnsel dat periodiek in de tijd is. Omdat het lichtpostulaat iets over licht zegt, nemen we als uitgangspunt de zg. *lichtklok*. Bij deze klok kaatst licht heen en weer tussen twee spiegels. Dat licht wordt uitgezonden met een zeer korte pulsduur, zodat we daarvan het begin nauwkeurig kunnen bepalen en hiermee het tijdsverschil tussen twee opeenvolgende tikken van de klok kunnen aflezen. We kiezen voor deze tijdsduur tussen twee tikken één nanoseconde waarin het licht heen en weer gaat. In die tijd legt het licht 30 centimeter af, dus staan de spiegels op een afstand van $L = 15$ centimeter. We kiezen deze eenheid van een nanoseconde voor de duur tussen twee tijdstikken om een handzame klok te verkrijgen. De relatie tussen de tijdsduur en de afstand geldt uiteraard alleen als de klok stilstaat ten opzichte van ons, als waarnemer. Hou de klok nu rechtop, dus de spiegels evenwijdig aan de grond, maar laat de gehele klok bewegen met een snelheid v. Denk daarbij aan een klok in een rijdende trein die we van het perron waarnemen. Als we mee zouden reizen met de klok in de trein verandert er natuurlijk niets, maar wij staan op het perron en volgen het licht van onder naar boven en weer terug. Omdat de spiegels en de trein met een snelheid v bewegen, hebben deze tussen de tijd van het vertrek van het licht en de aankomst bij de bovenste spiegel een afstand $vT/2$ afgelegd, en nog eens dezelfde afstand op de terugweg, zie de figuur. Hierbij is T uiteraard de tijdsduur voor het op en neer gaan van het licht, *maar gezien vanuit onze waarnemingspositie*. Om deze tijd T te bepalen, rekenen we uit wat de afstand is die het licht heeft afgelegd. Hier gebruiken we de stelling van Pythagoras,[1] want deze afstand is twee maal de lengte van de schuine zijde van de rechthoekige driehoek die we in de figuur hebben aangegeven. De verticale rechte zijde heeft een lengte L, en de horizontale rechte zijde een lengte $vT/2$. Dus de weg die het licht heeft afgelegd is gelijk aan $2\sqrt{L^2 + (vT/2)^2}$. Anderzijds is deze lengte ook gelijk aan de snelheid van het licht vermenigvuldigd met de tijd T die het nodig had.



Nu komt het lichtpostulaat van pas, want die snelheid is dus gelijk aan c (onafhankelijk van de beweging van de klok, die met een constante snelheid beweegt, zodat er – in goede benadering – geen krachten op werken). Dus

$$cT = 2\sqrt{L^2 + (vT/2)^2}$$

Anderzijds geldt voor de waarnemer die meereist met de klok dat het licht vertikaal op en neer gaat, dus een afstand $2L$ aflegt. De tijd die het daarvoor gebruikt is de nanoseconde ($t = 10^{-9}$ s); zo hebben we nu eenmaal de klok geijkt. Ook voor de meereizende waarnemer is de snelheid van het licht gelijk aan c, zodat $ct = 2L$. De hoogte van de klok L is voor beide waarnemers hetzelfde. Dus we kunnen $L = ct/2$ invullen in de andere vergelijking

$$cT = 2\sqrt{(ct/2)^2 + (vT/2)^2}$$

Linker- en rechterkant van de vergelijking kwadrateren geeft

$$(cT)^2 = (ct)^2 + (vT)^2$$

[1] Als je nog nooit een bewijs van deze stelling hebt gezien, dan wordt het nu de hoogste tijd! Zie Appendix A

We brengen $(vT)^2$ naar de andere kant van de vergelijking, delen door c^2 en vinden

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)T^2=t^2$$

Hieruit lossen we nu dus eenvoudig T op, in termen van t en v

$$T=t/\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

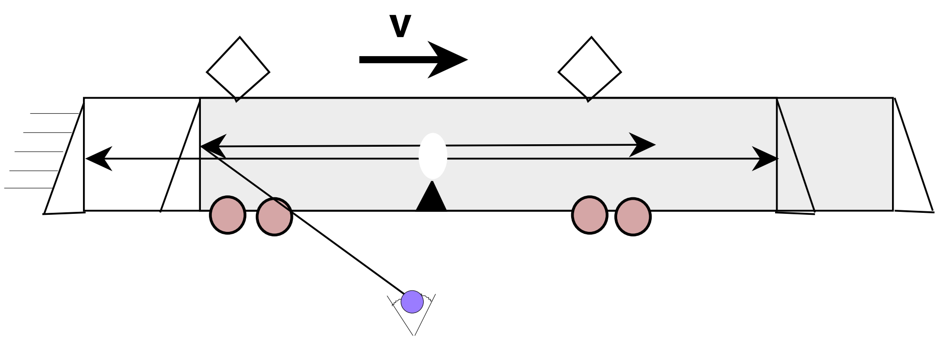
Dit is de beroemde formule van Einstein voor de tijdsdilatatie: *we zien een bewegende klok langzamer lopen dan een stilstaande klok.* Hoeveel langzamer hangt van de snelheid van de klok af. Als de snelheid gelijk aan nul is, dan is natuurlijk $T=t$, zoals het hoort. Als v nu groter en groter wordt, dan wordt ook T groter en groter. Totdat v dichter en dichter bij c komt, en T onbeperkt groot wordt. Bij $v=c$ is dan de tijdsduur tussen twee tikken op de klok oneindig groot, de tijd van de bewegende klok komt voor de waarnemer stil te staan.

Je zult gemerkt hebben dat we telkens het waarnemingsaspect benadrukken. En waarnemen gaat nu eenmaal meestal via licht. Het was ook de eigenschap van het licht die aanleiding gaf tot dit, op het eerste gezicht, bizarre resultaat. Waarom is dit de meeste mensen nooit opgevallen.[2] Dat komt omdat in de dagelijkse praktijk de snelheden zo klein zijn ten opzichte van de snelheid van het licht. Laten we de omloopsnelheid van de aarde om de zon als voorbeeld nemen. Daarvoor is dus $v/c=1/10000$. Bij het berekenen van de tijdsdilatatie moeten we hiervan het kwadraat nemen. De afwijking in de gang van de klok is bij deze snelheid slechts 1 op 200 miljard seconden, of 1 seconde in 6 jaar, 4 maanden en 2 dagen. Dat kan men met atoomklokken wel meten, maar maakt echter wel duidelijk dat we er in het dagelijkse leven niets van merken. Toch zul je ongetwijfeld denken dat het komt door de manier waarop we de tijd hebben gemeten. Echter, laten we eens een heel andere klok nemen. Denk aan een koekoeksklok, een digitale klok, of wat mij betreft een tennisklok, waar een tennisbal op en neer stuitert (dan moeten we wel aannemen dat er geen energie verloren gaat bij het stuiteren, of door de wrijving met de lucht, maar het idee is duidelijk). Als we deze klokken in rust met elkaar vergelijken kunnen we bepalen hoeveel tikken de lichtklok heeft, binnen één tik van de koekoeks-, tennis- of digitale klok (dat zullen veel tikken zijn, maar dat maakt niet uit). Als nu al die klokken ten opzicht van *ons* bewegen, dan staan ze nog steeds stil ten opzicht van *elkaar*, en lopen dus nog steeds gelijk, ook voor ons, omdat het eenduidig is wanneer op dezelfde plaats en dezelfde tijd twee tikken samenvallen. Hoe raar het op het eerste gezicht ook lijkt, de tijdsdilatie is een *universeel* verschijnsel, en wordt daarbij van een eigenschap die bewegende klokken hebben, verheven tot een eigenschap van de tijd.

Een consequentie van het lichtpostulaat is dus dat er iets vreemds met de tijd gebeurt. Dit volgt ook uit het beroemde *gedachtenexperiment* van Einstein met een trein. We kunnen daarmee illustreren dat gelijktijdigheid van gebeurtenissen op *verschillende* punten in de ruimte afhangt van de bewegingstoestand van de waarnemer. Immers als we midden

[2] Ik verwijs hier natuurlijk naar objectieve tijdswaarneming. Voor het *gevoel* gaat de tijd juist langzaam als men stilstaat.

in de trein tegelijkertijd vanaf hetzelfde punt naar links en rechts een lichtpuls versturen, dan komt deze voor de waarnemer in de trein tegelijkertijd aan de voor en de achterkant van de trein aan. Maar als we nu diezelfde gebeurtenis vanaf het perron waarnemen, dan is de achterkant van de rijdende trein wat in de richting van de lichtbron verschoven tijdens de reis van de lichtpuls, terwijl de voorkant van de trein juist wat verder weg is gegaan. De puls zal dus eerder aan de achterkant arriveren dan aan de voorkant. Dit is zo, omdat ook voor de waarnemer op het perron de snelheid van het licht gelijk is aan c. Bij geluidsgolven zou de snelheid van het geluid ten opzichte van het perron, gericht naar de achterkant van de trein, gelijk zijn aan $c - v$, terwijl het naar de voorkant snellende geluid "met de trein wordt meegesleurd" en een snelheid $c + v$ zou hebben. Dat zou dan het tijdsverschil compenseren. Maar voor het licht geldt dit dus *niet*, zijn snelheid blijft onafhankelijk van die van waarnemer of bron.



Met een tijd die langer wordt voor bewegende klokken, maar een snelheid die onafhankelijk van de beweging is, ligt het voor de hand dat de waargenomen lengte van een meetlat korter wordt. Dit is de beroemde *Lorentzcontractie,* vernoemd naar de Leidse hoogleraar die zijn naam heeft gegeven aan het Instituut voor Theoretisch Natuurkunde. We geven de bewegende klok een lampje mee dat gedurende de tijd T aan is. We nemen nu een meetlat met een lengte L_0, waarlangs de klok beweegt, precies zo dat het lampje alleen aan is zolang de klok zich ter hoogte van de meetlat bevindt. Dus $L_0 = vT$. Hoe ziet dit eruit voor iemand die met de klok meebeweegt, en ten opzichte waarvan de meetlat dus beweegt met een snelheid v? Voor die waarnemer is het lampje aan gedurende een tijd $t = T\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en deze waarnemer concludeert dus dat de meetlat een lengte heeft gelijk aan $L = vt = vT\sqrt{1 - v^2/c^2} = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$. *Een bewegende meetlat wordt verkort waargenomen in de richting van de beweging* (loodrecht op de beweging zal de lengte van de meetlat *niet* veranderen).

We zien dat de bewegingstoestand een belangrijk rol speelt. Helaas wordt vaak het begrip "alles is relatief" uit zijn verband gerukt, en vaak buiten de natuurkunde toegepast. Maar ook binnen de natuurkunde kan dit tot grote verwarring aanleiding geven. We gaan nu, om jullie in die verwarring te brengen, de beroemde tweelingenparadox bespreken.[3] We sturen een astronaut met een snelheid die achttiende van de lichtsnelheid bedraagt ($v = 0,8c$) naar de ster alpha Centauri, die op ongeveer een afstand van 4 lichtjaar staat.

[3]Het woord *paradox* wordt hier in zijn juiste betekenis gebruikt, namelijk een *schijnbare tegenstelling.*

In de sterrenkunde zijn alle afstanden groot, en om te voorkomen dat we over de grote getallen struikelen hebben de sterrenkundigen de grootheid *lichtjaar* ingevoerd. Dit is de afstand die het licht in één jaar aflegt. Dus 300.000 km/s maal 365 (=aantal dagen in een jaar) maal 24 (=aantal uren in een dag) maal 3600 s (=aantal seconden in een uur), ofwel ongeveer 9,5 biljoen kilometer ($9,5 \times 10^{12}$ km). Om jullie een idee te geven, de afstand van de aarde tot de zon is ca. 8,3 licht*minuten*.

De tweelingbroer van de astronaut blijft achter op aarde. Gemeten op *zijn* klok doet de astronaut over de 4 lichtjaren slechts 5 aardse jaren. Immers het licht doet er 4 jaar over en de snelheid van de astonaut is 8/10, ofwel 4/5, van die van het licht. De astronaut doet er een factor 5/4 langer over dan het licht, dus 5 jaar. Als we even aannemen dat de astronaut meteen terugreist met dezelfde snelheid, dan doet hij er nog eens 5 aardse jaren over om terug te komen. Dus na 10 aardse jaren is de astronaut weer veilig terug. Maar nu hebben we een probleem. Voor de astronaut wordt zijn leeftijd bepaald door een klok die met hem meereist. Het levensritme, waarmee ademhaling, celdeling en sterfte plaatshebben is zo'n (weliswaar niet bijster nauwkeurige) klok. Omdat deze klok beweegt ten opzichte van de tweelingbroer weet ook hij dat de klok van de astronaut minder snel loopt, en wel met een factor $1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 1/\sqrt{1-0,8^2} = 1/\sqrt{0,36} = 1/0,6 = 5/3$. Dus is de astronaut bij terugkomst na 10 aardse jaren slechts $3/5 \times 10 = 6$ jaren ouder geworden.

Waarom geeft dit zoveel verwarring? De *foute* redenering zegt dat volgens Einstein alles relatief is, de natuurwetten zijn in ieder stelsel gelijk. Dus kunnen we ook doen alsof de astronaut op zijn plaats blijft en de tweelingbroer over 4 lichtjaren heen en weer reist, en dus jonger terug zou moeten komen. Maar hij kan niet én jonger én ouder zijn. Maar laten we even iets preciezer zijn. Het is niet zo dat we bij de omkering van de rol van astronaut en tweelingbroer de laatste over 4 lichtjaren heen en weer sturen, nee we moeten met hem de hele aarde, ja zelfs het hele zonnestelsel, de melkweg, het hele heelal over 4 lichtjaar heen en weer sturen. En geloof me, er is geen raket in het universum die zoveel stuwkracht kan geven dat we dit allemaal voor elkaar krijgen. Door de versnelling en de vertraging die nodig zijn om de astronaut zijn snelheid te geven, kan men *niet* de rol van astronaut en tweelingbroer verwisselen. Het zijn zowel de versnellingen als de vertragingen die in feite de astronaut zijn verjonging opleveren. Hardlopers zijn in dit geval dus geen doodlopers!

Men heeft deze verjongingskeur echt kunnen meten, door met gevoelige atoomklokken een vliegreis te maken. Ook in de grote deeltjesversnellers, waar electrisch geladen deeltjes met snelheden dicht bij die van het licht worden rondgestuurd, en waar dus het effect van de tijdsdilatatie erg groot is, heeft men het effect ondubbelzinnig aangetoond. Het is zelfs zo dat de deeltjesversnellers niet eens *kunnen* werken zonder hiermee rekening te houden. In ons voorbeeld hoort de snelheid van $0,8c$ natuurlijk nog lang niet tot de mogelijkheden van de aardse ruimtevaart (maar wel van de deeltjesfysica). Echter, met de populaire serie Star Trek is het tegenwoordig wat minder moeilijk een voorstelling te maken van wat het betekent om met zulke grote snelheden te reizen.

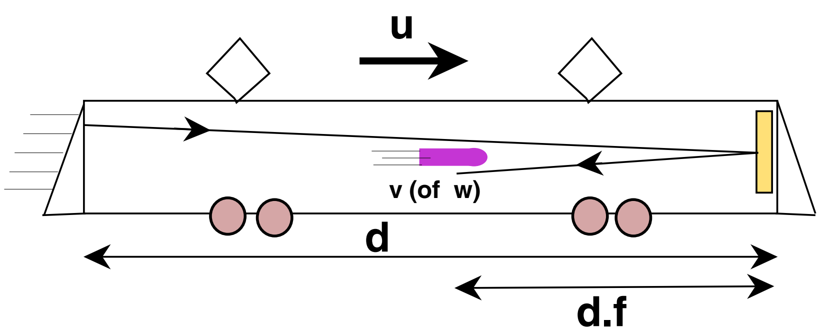
Einstein heeft bij het ontwikkelen van zijn theorie veel gebruik gemaakt van *gedachtenexperimenten*. Één daarvan hebben we al besproken. In Einstein's tijd waren die vaak niet praktisch uitvoerbaar. Vóórdat we nog een voorbeeld van een gedachtenexperiment van Einstein bespreken, noem ik een erg fraai resultaat dat kan worden verkregen door een gedachtenexperiment dat David Mermin heeft verzonnen. Dit laat zien dat uit het lichtpostulaat volgt dat, bijvoorbeeld een kogel die met een snelheid v binnen een trein wordt afgevuurd in de richting van de beweging van de trein (welke met een snelheid u aan het perron voorbij rijdt) ten opzichte van dat perron *niet* een snelheid $u + v$ heeft, maar een snelheid

$$\frac{u+v}{1+uv/c^2}.$$

Voor *kleine* snelheden merken we weinig van de afwijking van het verwachte resultaat, $u + v$. Maar neem nu eens het extreme geval dat we in plaats van met een geweer, met een laser schieten. Natuurlijk is de snelheid van het laserlicht *niet* gelijk aan $u + c$, want dat is in strijd met het lichtpostulaat. Wonderwel zien we dat

$$\frac{u+c}{1+uc/c^2} = \frac{u+c}{1+u/c} = c$$

inderdaad precies de lichtsnelheid oplevert! Mooier kan het niet, zou je denken. Toch wel, want we kunnen ons nu gaan afvragen, of we sneller dan het licht kunnen bewegen. We kunnen bijvoorbeeld proberen vanuit de voyager, die met een snelheid $0,8c$ beweegt, een shuttle te lanceren die ten opzichte van de voyager ook een snelheid $0,8c$ heeft. Ik hoor je denken: "dan zal toch wel de totale snelheid van de shuttle groter dan die van het licht zijn." Mooi dus niet: $(0,8c + 0,8c)/(1 + (0,8c)^2/c^2) = (1,6/1,64)c$ en dat is nog steeds *kleiner* dan c. Wat je ook probeert, de snelheid opbouwen in vele stappen met snelheden die ieder voor zich dicht bij c zitten, de totale snelheid zal *nooit* groter dan die van het licht zijn.



Het fraaie idee van Mermin was dat we op twee manieren kunnen uitrekenen op welke *fractie* f van de totale lengte van de trein een kogel en lichtpuls elkaar ontmoeten, als deze tegelijk vanaf de achterkant werden afgevuurd.[4] Namelijk één keer vanuit het oogpunt van iemand die veilig op het perron achterblijft

$$\mathrm{f} = \frac{(c+u)(c-w)}{(c-u)(c+w)},$$

[4]De spiegel dreigt daarbij te sneuvelen, weliswaar na de voltooiing van het experiment!

met w de snelheid van de kogel ten opzichte van het perron, en één keer vanuit het oogpunt van iemand die met de trein meereist

$$\mathrm{f} = (c - v)/(c + v)$$

(ook te verkrijgen door in het vorige resultaat $u = 0$ en $w = v$ te substitueren!) Deze twee aan elkaar gelijk stellen geeft $w = (u + v)/(1 + uv/c^2)$. Mermin's afleiding wordt in opgave 1, zie hieronder, in meer detail behandeld.

II: Equivalentie van Energie en Massa

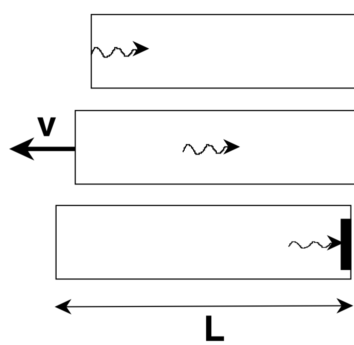
Nu komen we dan toe aan $E = mc^2$. Ook hiervoor gebruikte Einstein fraaie gedachtenexperimenten. We hebben daarbij het begrip "hoeveelheid beweging" nodig (ook wel impuls genoemd). Dat is massa vermenigvuldigd met snelheid, of mv. Het blijkt zo te zijn dat de totale hoeveelheid beweging behouden is als er op het geheel waarvan we deze totale hoeveelheid beweging bepalen geen *uitwendige* krachten werken. Dit verklaart de terugstoot bij het afvuren van een geweer. De kogel gaat in voorwaartse richting, het geweer in achterwaartse richting. De massa van de kogel is veel kleiner dan die van het geweer, waardoor de terugslag van het geweer evenredig veel kleiner is. Hetzelfde bij de voortstuwing van een raket: Die gaat vooruit door de verbrandingsgassen die naar achteren worden gestuwd. Ook de botsing van biljartballen wordt door het behoud van de hoeveelheid beweging (én van energie) bepaald. Schieten we een biljartbal *precies in het midden* op een andere biljartbal, dan valt de bal die we stoten stil en gaat de geraakte bal met de snelheid van de gestote bal verder. De hoeveelheid beweging is behouden, want beide biljartballen hebben dezelfde massa.[5]

Behoud van de hoeveelheid beweging is volledig equivalent met de opmerking dat het zwaartepunt van een systeem waarop geen *uitwendige* krachten werken niet versnelt. Als het zwaartepunt beweegt dan kunnen we onze metingen in het stelsel doen waarin het zwaartepunt in rust is. De coördinaten van het zwaartepunt worden in dit zogenaamde rust- of zwaartepuntstelsel bepaald door de coördinaten van ieder object, vermenigvuldigd met de massa van dat object, bij elkaar op te tellen en te delen door de totale massa. Een tijdje later zijn de coördinaten veranderd maar blijft het zwaartepunt hetzelfde. Omdat de componenten van de snelheid in de verschillende coördinaatrichtingen worden bepaald door de verandering van de coördinaten te delen door de tijd, zien we aldus dat de totale hoeveelheid beweging niet verandert (in het zwaartepuntstelsel is de totale hoeveelheid beweging gelijk aan nul). Daarnaast is het natuurlijk iedereen bekend dat de totale energie altijd behouden moet zijn. Beide wetten zijn op de ervaringswereld gebaseerd, maar hebben ook een diepere betekenis die samenhangt met het feit dat er (althans in principe) in de ruimte geen voorkeurspunt en in de tijd geen voorkeurstijd is aan te geven.

We hebben nog één ingrediënt nodig, namelijk dat licht naast een hoeveelheid energie, ook een hoeveelheid beweging heeft. Dit is de zogenaamde stralingsdruk en deze is niet zo

[5] Vervang een van de biljartballen door een die precies even groot is, maar een ander gewicht heeft, en je zult zien hoe zelfs een ervaren biljarter er een potje van maakt.

eenvoudig te meten, maar heeft onder andere (deels) te maken met het feit dat kometen een staart vormen, en de zon niet onder zijn eigen gewicht instort. Beide eigenschappen volgen ook uit de theorie van Maxwell. Daaruit volgt tevens dat de energie van het licht *precies* gelijk is aan de hoeveelheid beweging vermenigvuldigd met de snelheid c. Einstein's beroemde formule laat zien dat de energie van het licht equivalent is met een hoeveelheid massa. Gewoonlijk bepalen we massa door op een weegschaal objecten met elkaar te vergelijken. Daarbij wordt zo'n object, bijvoorbeeld een appel, eerst stil gelegd op de weegschaal en dan gewogen. Dit heet ook wel *rustmassa*. Maar licht *kan niet* stil gezet worden. Dat is de ultieme consequentie van het lichtpostulaat. Het beweegt altijd met de snelheid c. Als we het toch stilzetten, kan het geen energie meer hebben, maar uitspraken doen over niets heeft weinig zin. We zeggen wel dat licht een rustmassa gelijk aan nul heeft. Toch blijkt uit het volgende gedachtenexperiment van Einstein dat de energie van het licht wel degelijk bijdraagt aan massa. Einstein liet dit zien door naar het zwaartepunt van een doos te kijken, waarbij binnen de doos een lichtpuls wordt uitgestuurd. Doordat deze puls een hoeveelheid beweging heeft, zal de doos een terugstoot ondervinden. De doos beweegt dan in de tegengestelde richting, *totdat* de lichtpuls aan de andere kant van de doos wordt opgevangen. Hierbij draagt het precies de juiste hoeveelheid van beweging aan de doos over, om deze weer tot stilstand te brengen. Maar terwijl het licht van de ene kant naar de andere kant is bewogen, heeft de doos een afstand afgelegd, die weliswaar klein is (omdat de lichtsnelheid zo groot is), maar niet gelijk aan nul. Echter al die tijd hebben er geen krachten van buiten op de doos gewerkt. Het zwaartepunt moet daarom op zijn plaats blijven. Dat kan alleen als de lichtpuls de hoeveelheid beweging van de doos neutraliseert. Maar dat betekent dat de lichtpuls een massa vertegenwoordigt, want anders zou het niet bijdragen aan de bepaling van het zwaartepunt.



Het is niet moeilijk om uit te rekenen wat deze equivalente massa is. Als E de energie van de lichtpuls is, dan is de hoeveelheid beweging dus E/c. Als het licht, zoals in bovenstaande figuur, naar rechts beweegt krijgt de doos een terugslag (met snelheid v) naar links, met een hoeveelheid beweging Mv die gelijk is aan E/c. De massa van de doos is M, maar de waarde daarvan is niet van belang. Het licht legt een afstand L af gedurende de tijd $t = L/c$, terwijl de doos in die tijd een afstand $d = vt$ aflegt. Nadat het licht aan de rechterwand is geabsorbeerd komt de doos weer tot stilstand en heeft het zwaartepunt zich dus verplaatst over een afstand[6] $mL - Md$. Hierbij is m de massa die het

[6] Een betere variant van dit fraaie gedachtenexperiment wordt in Appendix B besproken.

licht nodig heeft om dit zwaartepunt op zijn plaats te houden, zodat dus $mL - Md = 0$ een oplossing heeft. We vullen nu eerst in dat $d = vt$, dan $t = L/c$, en tenslotte $Mv = E/c$. We vinden daarmee

$$mL - Md = mL - Mvt = mL - Mv(L/c) = mL - (E/c)(L/c) = L(m - E/c^2).$$

Dit kan dus alleen nul zijn als inderdaad Einstein's beroemde formule $E = mc^2$ geldt! Maar nogmaals, licht kan niet stilgezet worden en heeft geen rustmassa.

III: Snelheidsafhankelijke Massa

Als een deeltje wel een rustmassa (m_0) heeft, dan is het nu ook duidelijk dat de massa van de snelheid af moet hangen. Want als een deeltje een snelheid krijgt, dan wint het aan energie.[7] Deze bewegingsenergie is gelijk aan $E_k = m_0 v^2/2$, de zogenaamde kinetische energie, maar dit geldt alleen bij lage snelheden. De totale energie is dan de energie bij rust, ofwel de rustenergie $E_0 = m_0 c^2$, plus de kinetische energie. Dus

$$E = m_0(1 + \tfrac{1}{2}v^2/c^2)c^2 = mc^2.$$

We concluderen dat $m = (1 + \frac{1}{2}v^2/c^2)m_0$ bij lage snelheden. Het resultaat geldig voor *willekeurige* snelheden, luidt

$$m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

We gaan na dat dit inderdaad bij lage snelheden het eerdere resultaat geeft. Daartoe moeten we aantonen dat (het symbool $\sim$ betekent "in benadering gelijk aan")

$$(1 + \tfrac{1}{2}v^2/c^2) \sim 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad ?$$

zolang v veel kleiner is dan c. Vermenigvuldig links en rechts met $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en kwadrateer beide kanten van de vergelijking, zodat

$$(1 + \tfrac{1}{2}v^2/c^2)^2(1 - v^2/c^2) \sim 1 \quad ?$$

Dit is juist zolang we v^4/c^4 kunnen verwaarlozen ten opzichte van v^2/c^2 hetgeen voor lage snelheden, veel kleiner dan c, natuurlijk is toegestaan.

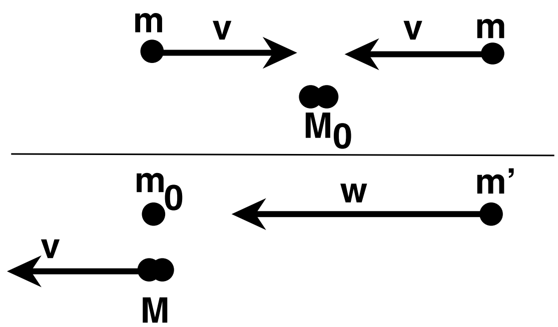
Nu begrijpt je ook waarom *niets sneller dan het licht kan.* Hoe groter de snelheid is, hoe groter de massa, hoe moeilijker het wordt nog meer snelheid te maken. Als $v = c$ wordt de massa oneindig groot en kost het oneindig veel moeite om de snelheid op te voeren. Hiervoor is het natuurlijk essentieel dat de formule voor de snelheidsafhankelijke massa inderdaad juist is. Geen nood. Nog één mooi gedachtenexperiment en ik heb jullie ook daarvan overtuigd.

[7] Zoals je op pijnlijke wijze zult ondervinden bij een botsing.

We nemen twee klitteballen, bolletjes die blijven kleven als ze tegen elkaar aan worden gegooid, ieder met precies dezelfde rustmassa m_0. We doen dit door ze precies met dezelfde snelheid v, maar in exact tegengestelde richting, te laten botsen. Omdat de massa's gelijk zijn (hoewel in beweging $m \neq m_0$), komen ze exact tot rust na de botsing (behoud van hoeveelheid beweging). Dit heet een inelastische botsing, in tegenstelling tot een elastische botsing bij biljartballen. De twee klitteballen vormen nu een geheel, en we noemen de rustmassa van dat geheel M_0. We gaan nu precies dezelfde botsing bekijken vanuit het stelsel dat meebeweegt met één van de klitteballen voor de botsing, maar daarna met de snelheid v blijft bewegen. In dit nieuwe stelsel heeft de andere klittebal vóór de botsing een snelheid w (en een massa m'), die we krijgen door v relativistisch op te tellen bij v.

$$w = \frac{v+v}{1+v^2/c^2} = \frac{2v}{1+v^2/c^2}.$$

In dit stelsel gaat uiteraard na de botsing het geheel van de twee aan elkaar klevende klitteballen verder met een snelheid v en een massa M. Zie de figuur hieronder.



We willen nu laten zien dat

$$m' = m_0/\sqrt{1-w^2/c^2}.$$

Hiervoor gebruiken we dat zowel de energie als de hoeveelheid beweging voor en na de botsing behouden zijn, dus

$$m'w = Mv \quad \text{en} \quad m'c^2 + m_0c^2 = Mc^2.$$

We vermenigvuldigen de tweede vergelijking (voor energiebehoud) met v/c^2 en gebruiken de eerste vergelijking (voor behoud van hoeveelheid beweging) om Mv te elimineren. Er volgt dus $m'v + m_0v = m'w$, ofwel

$$m' = m_0v/(w-v) = m_0(1+v^2/c^2)/(1-v^2/c^2).$$

Merk op dat we hiervoor in het geheel niet hoeven te weten wat M is. Om nu te laten zien dat $m' = m_0/\sqrt{1-w^2/c^2}$ moeten we helaas weer even rekenen. Het spijt me, maar wat eenvoudige algebra is wederom voldoende. We moeten dus laten zien dat

$$(1+v^2/c^2)/(1-v^2/c^2) = 1/\sqrt{1-w^2/c^2} \quad \text{of} \quad 1-w^2/c^2 = (1-v^2/c^2)^2/(1+v^2/c^2)^2.$$

Invullen van $w = 2v/(1 + v^2/c^2)$ en eventjes doorbijten zal aantonen dat ik jullie niet bedonderd heb.

In het oorspronkelijke stelsel hebben we het behoud van hoeveelheid beweging al gebruikt om te concluderen dat de samenklittende klitteballen stilvallen. Maar behoud van energie vertelt ons dat M_0c^2 gelijk aan de energie moet zijn die vóór de botsing in de twee klitteballen zat. Ieder heeft een energie $E = mc^2 = m_0c^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, en dus[8] $M_0c^2 = 2mc^2 = 2m_0c^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Dit is meer dan $2m_0c^2$, de gezamenlijke rustenergie van de twee klittenballen. Voor kleine snelheden is de toename van de rustenergie gelijk aan m_0v^2. Het is echter duidelijk waar dit vandaan komt, het is namelijk de som van de kinetische energie van beide klitteballen. Die is dus omgezet in een bijdrage aan de rustenergie van de twee aan elkaar klevende klitteballen na de botsing. Het is een voorbeeld van bindingsenergie, die bij kernsplijting vrijkomt in de vorm van kinetische energie van de vervalsproducten, en een van de redenen is waarom $E = mc^2$ zo een grote indruk heeft achtergelaten op deze, soms niet zo beschaafde, wereld. De vrijgekomen energie is vaak zo groot omdat een klein verschil in massa, door de grote waarde van de lichtsnelheid, een heel grote energie vertegenwoordigt.

IV: Zwarte Gaten

We bespreken tot slot nog kort wat consequenties van het laatste postulaat: in vrije val ondervindt *alles* dezelfde versnelling. Dit is de reden waarom in een ruimtestation dat om de aarde cirkelt er gewichtsloosheid heerst. Alles valt namelijk met dezelfde versnelling naar de aarde. Door precies de juiste baansnelheid te kiezen blijft het ruimteschip echter in zijn continue valbeweging op dezelfde hoogte boven het aardoppervlak. Nog een andere manier om dit postulaat te formuleren is dat versnelling equivalent is met gravitatie. Ook dit kennen jullie uit de dagelijkse ervaring. Een optrekkende lift geeft je de indruk zwaarder te zijn (het experiment met een vrijvallende lift is *niet* aan te bevelen). We kunnen zo'n kunstmatig gravitatieveld maken door een roterend wiel als ruimtestation te maken, wellicht hét ontwerp voor een permanent ruimtestation voor de volgende generatie. Door de rotatie ontstaat een centrifugale druk op de buitenwand van het roterende ruimtestation, en bij de juiste omloopsnelheid kunnen we het makkelijk zo inrichten dat we letterlijk de aarde onder onze voeten voelen. De omloopsnelheid geeft aanleiding tot een tijdsdilatatie van de klokken op de roterende wand ten opzichte van een klok die in het midden stilstaat. Daar waar de klok stilstaat heerst géén centrifugale kracht. Op de wand hoort bij de kracht een ontsnappingsnelheid. Voor een roterende beweging is de onsnappingsnelheid ($v_{\rm ont}$) precies gelijk aan de omloopsnelheid. Klokken in het centrifugale krachtenveld lopen dus langzamer met een factor $1/\sqrt{1 - v_{\rm ont}^2/c^2}$. Maar het equivalentieprincipe zegt dat we geen onderscheid kunnen maken tussen een centrifugale kracht, de kracht van een versnellende lift, of de gravitatiekracht van een centrale massa,

[8] Je kunt nu zelf nagaan dat inderdaad $M = M_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, door bijvoorbeeld gebruik te maken van $Mc^2 = m'c^2 + m_0c^2$.

zoals de zon of de aarde.

We concluderen dus, en wonderlijk genoeg is dit precies goed, dat klokken in een gravitatieveld langzamer lopen met een factor gegeven door $1/\sqrt{1 - v_{\rm ont}^2/c^2}$. Nu wordt echter de ontsnappingsnelheid in een gravitatieveld gegeven door $v_{\rm ont}^2 = 2GM/r$, waarbij M de centrale massa is, r de afstand tot het centrum en G Newton's constante van gravitatie. Dus in een gravitatieveld lopen klokken langzamer met een factor $1/\sqrt{1 - 2GM/(rc^2)}$. Het is deze zogenaamde gravitationele tijdsdilatatie die de astronaut de tijdswinst geeft ten opzichte van zijn achtergebleven tweelingbroer die geen versnelling ondergaat.

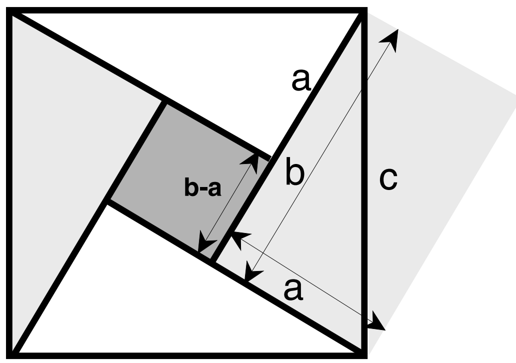
Opmerkelijk genoeg komt de tijd stil te staan op een afstand $r = 2GM/c^2$. Dit heet de *Schwarzschildstraal*. Voor de zon is deze straal 2,95 km (en voor de aarde 0,9 cm), maar dat geldt alleen als alle massa is samengeperst *binnen* deze afstand. De Schwarzschildstraal is uiteraard ook de afstand waar de ontsnappingsnelheid gelijk is aan de lichtsnelheid. Licht kan dus niet vanuit een straal die kleiner is dan de Schwarzschildstraal naar buiten komen. Het wordt een zwarte ster, zoals Laplace zich al realiseerde. Echter met de algemene relativiteitstheorie van Einstein komt daar ook de tijd stil te staan, en wordt deze Schwarzschildstraal tot een gat in de ruimte-tijd. Vandaar de naam

“**ZWART GAT**”.

Tot slot wil ik jullie op twee prachtig geschreven boeken over dit onderwerp wijzen. “Mr. Tompkins in Paperback”, door George Gamow (Cambridge University Press, 1965) en “Einstein's Mirror”, door Tony Hey en Patrick Walters (Cambridge University Press, 1997). Verder is er veel informatie te vinden op de webpagina van mijn eerstejaarscollege speciale relativiteitstheorie, http://www.lorentz.leidenuniv.nl/vanbaal/relative.html, waar je deze tekst nog eens kunt doorlezen met interessante verwijzingen (ook naar de uitwerkingen van de opgaven). Ook mijn collegedictaat is daar te vinden, en nog vele andere interessange verwijzingen.

Appendix A

De stelling van Pythagoras voor een rechthoekige driehoek zegt: het kwadraat van de schuine zijde met lengte c is de som van de kwadraten van de twee rechte zijden met lengten a en b. Of ook, de oppervlakte van een vierkant met zijden die even lang zijn als de schuine zijde, is de som van de oppervlakten van twee vierkanten ieder met de zijden gelijk in lengte aan een van de twee rechte zijden van de driehoek. Met de figuur hieronder is dan eenvoudig een bewijs van de stelling van Pythagoras geleverd. We bouwen het



vierkant met de oppervlakte c^2 op uit de vier gelijke rechthoekige driehoeken, waarvan de schuine zijde met een lengte c samenvallen met de zijden van het vierkant. Daarbij houden we een vierkantje over waarvan de zijden een lengte $b - a$ hebben. Omdat twee dezelfde rechthoekige driehoeken, met hun schuine zijden tegen elkaar, een rechthoek geven met afmetingen a en b, en dus met een oppervlak $a \times b$, geldt dus dat c^2 gelijk is aan twee maal dat oppervlak ($2ab$, of ook vier maal het oppervlak van de driehoek), plus het oppervlak van het overblijvende vierkantje, $(a-b)^2$. Nu wat simpele algebra:

$$c^2 = 2ab + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2,$$

en we zijn klaar met ons bewijs. De schuine zijde wordt dus gegeven door

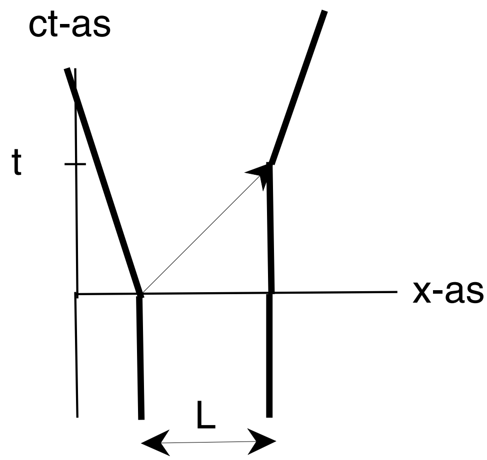
$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

immers het kwadraat, c^2, van de wortel is gelijk aan $a^2 + b^2$.

Appendix B

Het probleem met de doos in Einstein's gedachtenexperiment is dat we aannemen dat de voor- en achterkant *gelijktijdig* gaan bewegen, of stoppen. Maar gelijktijdigheid hangt van de bewegingstoestand af. Het zou bovendien betekenen dat er informatie van de ene kant van de doos naar de andere wordt gestuurd met een oneindige snelheid, hetgeen in strijd is met het feit dat niets sneller kan dan het licht. In de praktijk merken we hier niets van, omdat het gaat om zeer kleine effecten en verplaatsingen. We bespreken daarom nu een betere variant om tot $E = mc^2$ te komen.

We ontkoppelen de twee wanden en noemen het nu blokken, die we ieder dezelfde massa M geven (*terwijl* ze bewegen). Nu is er alleen een terugstoot bij het linker blok, met $v = -E/(Mc)$. Het rechter blok blijft stil staan, zodat het licht een afstand L moet overbruggen (zie de figuur), dus $t = L/c$. Bij de absorptie krijgt het rechter blok



een beweging naar rechts, en omdat de massa dezelfde is als die van het linker blok, is diens snelheid in grootte gelijk, $v = E/(Mc)$. Na absorptie bewegen het linker en rechter blok in tegengestelde richtingen met precies dezelfde snelheid. Omdat ze ook precies dezelfde massa hebben beweegt, zoals het hoort, het zwaartepunt niet. Tussen het moment van emissie en absorptie van het licht beweegt alleen het linkerblok over een afstand $x = -vt = -EL/(Mc^2)$, zie de figuur. De eis dat het zwaartepunt op zijn plaats blijft is nu $Mx + mL = 0$ (het rechter blok draagt niet bij, omdat het zich niet verplaatst). Dat hieruit wederom $E = mc^2$ volgt is nu triviaal.

Opgaven

We hebben gezien dat de uitgangspunten van Einstein's relativiteitstheorie verrassend eenvoudig zijn. Met weinig middelen kan je zelf al heel leuke resultaten behalen. Je zult zien hoeveel voldoening het geeft dat je dat allemaal eerst zelf hebt kunnen "ontdekken".

Voor de hier volgende opgaven 1 en 2 is slechts het constant zijn van de lichtsnelheid (die we altijd c noemen) nodig. In opgave 3 is ook nog de Lorentzcontractie (het feit dat voor een bewegende waarnemer voorwerpen in de bewegingsrichting verkort lijken) nodig. Noem L_0 de lengte die de waarnemer meet als een voorwerp in rust is ten opzichte van de waarnemer. Als het voorwerp niet in rust is ten opzichte van de waarnemer, meet deze een lengte L, gegeven door

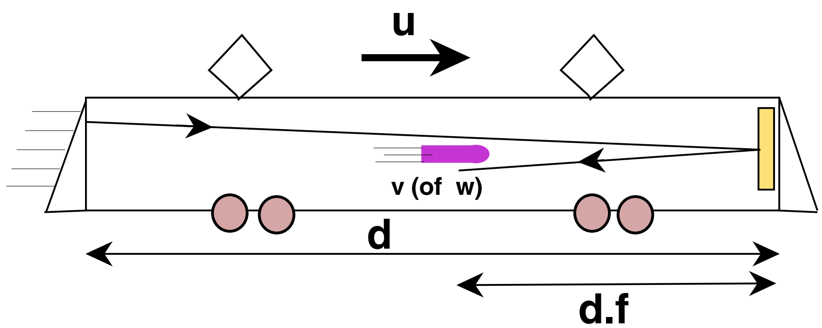
$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Hier is v de relatieve snelheid van het voorwerp ten opzichte van de waarnemer.

Veel plezier met de opgaven!

1. Het "optellen" van snelheden

De niet-relativistische manier van het (letterlijk) optellen van snelheden *kan* niet goed zijn, omdat deze kan leiden tot snelheden die groter zijn dan de lichtsnelheid. Hoe moet het dan wel? Om daar achter te komen voeren we een *gedachtenexperiment* uit (bedacht door N.D. Mermin).



We stellen ons een trein voor, rijdend met snelheid u (ten opzichte van een waarnemer). Vanuit één kant (de linkerkant in het plaatje) van de trein worden tegelijkertijd een kogel (met snelheid w ten opzichte van een waarnemer) en een lichtflits naar de andere kant geschoten. De lichtflits is natuurlijk sneller aan de andere kant dan de kogel, en wordt daar gereflecteerd in een spiegel. Op de weg terug komt de lichtflits de kogel tegen op een bepaalde fractie f van de lengte van de trein (die we d zullen noemen). Belangrijk is nu dat voor alle waarnemers f hetzelfde is; alhoewel verschillende waarnemers van mening zullen verschillen over de lengte d van de trein, zullen ze het er over eens zijn dat de kogel en lichtflits elkaar ontmoeten op een specifieke fractie van die lengte. We gaan nu f berekenen.

a. We gaan eerst uit van de waarnemer buiten de trein. Noem de tijd die de lichtflits er voor nodig heeft om de spiegel te bereiken T_1. In deze tijd heeft de lichtflits een afstand cT_1 afgelegd. Anderzijds heeft de lichtflits de lengte van de trein afgelegd, plus de afstand die de spiegel is verplaatst in de tussentijd t.g.v. de snelheid van de trein. De totale afstand kan dus ook worden uitgedrukt in d, u en T_1. Doe dit.

b. Noem de tijd die de lichtflits er voor nodig heeft om vanaf de spiegel de kogel te bereiken T_2. In deze tijd is de afstand fd afgelegd, verminderd met de afstand die de trein is tegemoet gekomen in de tijd T_2. Laat nu zien dat de verhouding T_2/T_1 niet van d afhangt.

c. De afstand die de kogel heeft afgelegd in de tijd $T_1 + T_2$, is precies gelijk aan de afstand die de lichtflits aflegt in een tijd T_1, *verminderd* met de afstand afgelegd in de tijd T_2. Ook hieruit is T_2/T_1 te vinden. Leidt nu af dat de fractie f gegeven wordt door

$$\mathrm{f} = \frac{(c+u)(c-w)}{(c-u)(c+w)}.$$

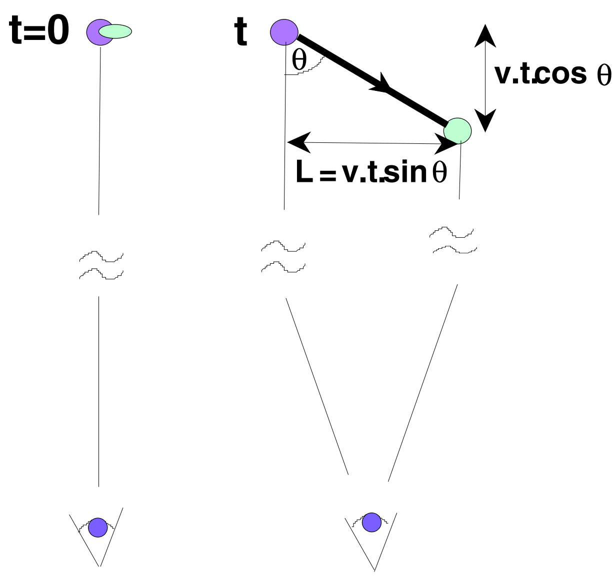
d. We hebben benadrukt dat f hetzelfde is voor *alle* waarnemers. In het bijzonder zal een waarnemer die met de trein meereist, vinden dat de trein stilstaat ten opzichte van hem ($u = 0$), terwijl de kogel met een snelheid v ten opzichte van hem beweegt, en dus dat f= $(c - v)/(c + v)$ (controleer dit!). Laat nu zien dat de snelheid w (die volgt uit het "optellen" van u en v) van de kogel in de trein wordt gegeven door

$$w = \frac{u + v}{1 + (uv/c^2)}.$$

Dit is het goede resultaat! Bestudeer deze formule: Wat is de w als: u of v nul is; u of v gelijk aan de lichtsnelheid c is; als u en v klein zijn ten opzichte van c?

2. Superluminale snelheden

Volgens de relativiteitstheorie kan niets sneller gaan dan het licht. Toch heb je misschien wel eens gehoord of gelezen dat astronomen soms objecten meten met snelheden groter dan de snelheid van het licht (zgn. superluminale snelheden). Is dat niet in strijd met de relativiteitstheorie?



We beschouwen een verweggelegen quasar, die op een tijdstip $t = 0$ een gaswolk uitstoot. De snelheid van de gaswolk noemen we v, en de afstand van de quasar tot de aarde noemen we d. De richting waarin de gaswolk wordt uitgestoten, maakt een hoek θ met de gezichtslijn.

a. Op welk tijdstip ziet een waarnemer op aarde de uitstoot van de gaswolk? Na een tijd t is de gaswolk een afstand vt verplaatst, waarvan $vt \cos\theta$ in de richting van de waarnemer, en $vt \sin\theta$ in de richting loodrecht op de gezichtslijn. Op welk tijdstip bereikt het licht van de gaswolk op dit punt, de aarde?

b. De transversale snelheid v_{obs} (dat is de snelheid loodrecht op de lijn van waarneming), zoals die wordt waargenomen op aarde, is de afstand loodrecht op de lijn van waarneming die de gaswolk aflegt (in een tijd t), gedeeld door het tijdsverschil tussen de waarneming van het uitstoten van de gaswolk en de waarneming van de gaswolk nadat deze de afstand vt heeft afgelegd. Laat zien dat deze snelheid wordt gegeven door

$$v_{obs} = \frac{v \sin\theta}{1 - (v/c)\cos\theta}.$$

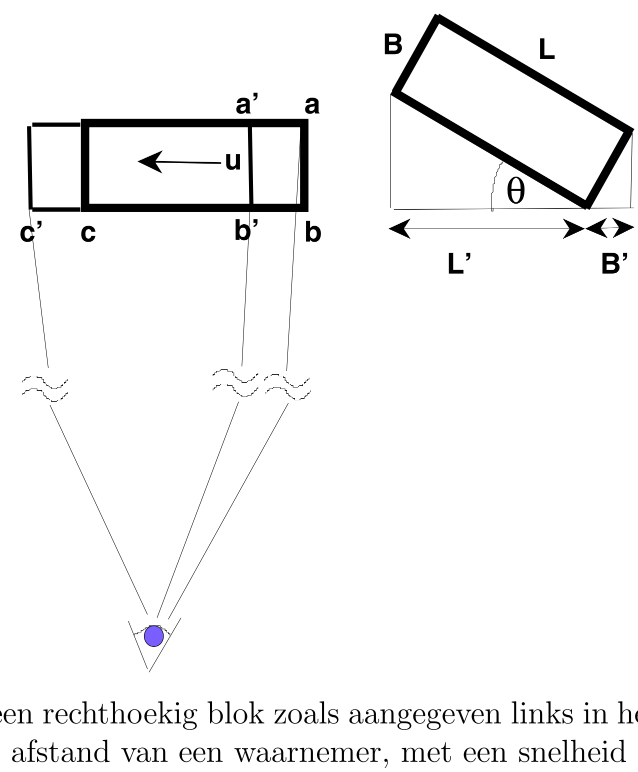
Is dat groter of kleiner dan de werkelijke transversale snelheid $v \sin\theta$? Kun je een θ en v vinden waarvoor v_{obs} *groter* is dan de lichtsnelheid?

c. Neem v vast, en bekijk v_{obs} als functie van θ. v_{obs} is maximaal als $\cos\theta = v/c$ (probeer dit af te leiden). Laat zien dat in dat geval geldt $v_{obs} = v/\sqrt{1-(v/c)^2}$. Hoe groot moet v minstens zijn om te zorgen dat v_{obs} groter is dan de lichtsnelheid?

d. Waarom is dit niet in strijd met de relativiteitstheorie?

3. Voorwerpen waargenomen bij hoge snelheden

De Lorentzcontractie zegt dat voor een bewegende waarnemer voorwerpen in de lengterichting van zijn beweging korter zijn. Equivalent: voor een stilstaande waarnemer zijn bewegende voorwerpen korter. Je zou nu misschien denken dat als een voorwerp een hoge snelheid heeft, je het vervormd ziet, omdat het in de lengterichting korter wordt, maar in andere richtingen niet. De werkelijkheid is echter iets subtieler.



a. We beschouwen een rechthoekig blok zoals aangegeven links in het plaatje. Het blok beweegt op grote afstand van een waarnemer, met een snelheid u. Aangegeven zijn de hoekpunten a, b en c. Op een iets latere tijd (die we dadelijk zullen specificeren) zijn de hoekpunten verplaatst naar a', b' en c'. Kijk nu naar de punten b' en c'. In het ruststelsel van het blok liggen deze een lengte L uit elkaar. Wat is de afstand tussen b' en c' die de waarnemer ziet? Kijk nu naar het punt a'. Dit punt ligt verder weg dan b' en c'. Het licht van dit punt zal dus langer onderweg zijn dan dat uit b' en c'. Hoeveel langer (de afstand van a' tot b' noemen we B)? Dit betekent dat we het licht uit punt a' *niet* tegelijkertijd met dat uit b' en c' zullen ontvangen! In plaats daarvan ontvangen we tegelijkertijd met licht uit b', c' het licht uit een punt a dat verschoven ligt ten opzichte van a. De verschuiving is gelijk aan de snelheid van het blok, vermenigvuldigd met de tijd die het licht erover doet om de breedte van het blok over te steken. Beschrijf nu hoe het blok door de waarnemer wordt waargenomen.

b. Beschouw nu een *stilstaand* blok, dat geroteerd is over een hoek θ (zie rechter plaatje). Een waarnemer kijkt vanaf dezelfde richting als onder onderdeel a tegen het blok aan. Hoe neemt hij het blok waar?

c. Vergelijk de situaties van de onderdelen a en b. Als het goed is zie je een opmerkelijke overeenkomst: de waarnemer ziet in de situatie onder a iets vergelijkbaars als onder b! De situaties zijn zelfs precies identiek als we de snelheid u in onderdeel a relateren aan de hoek θ onder b. Geef deze relatie.

d. Denk nu eens na hoe diverse objecten eruit zien als ze worden waargenomen met een hoge snelheid. Denk bijvoorbeeld aan een bol (zoals een doorzichtige gasnevel), of een platte ronde schijf, onder diverse hoeken met de bewegingsrichting.

   Het is misschien aardig om te weten dat dit effect pas beschreven werd in 1959 (door J.Terrell), terwijl de speciale relativiteitstheorie al van 1905 dateert!

Deze tekst is ook te vinden op www.lorentz.leidenuniv.nl/vanbaal/SRT/vwo/, met veel extra verwijzingen. Uiteraard eerst *zelf* de opgaven maken, voordat je de verwijzingen naar de uitwerkingen volgt.